

Du signal périodique au paquet d'onde

Du discret au continu

Les signaux réels sont limités dans le temps et dans l'espace, ils sont donc non périodiques (pierre jetée dans l'eau, cri...). Les OPPH à la base de l'analyse de Fourier sont illimitées dans le temps et dans l'espace (signaux mathématiques non physiques). Comment construire les signaux réels ? Les simulations ci-dessous permettent de comprendre cette construction sans recourir à un formalisme mathématique hors programme.

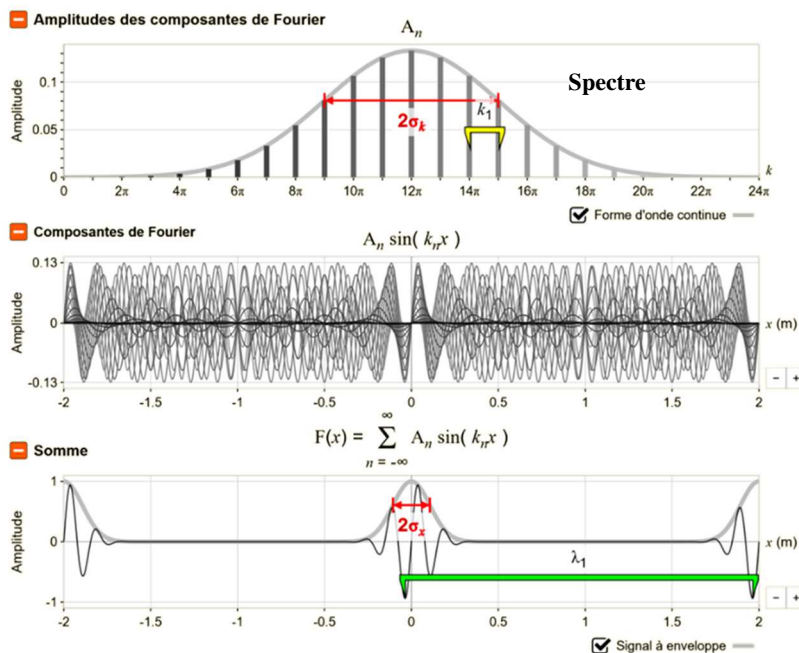
Les copies d'écran sont issues de l'applet « Faire des vagues ».
https://phet.colorado.edu/sims/html/fourier-making-waves/latest/fourier-making-waves_fr.html



Dans la suite, on s'intéresse au spectre dans le domaine spatial (les mêmes considérations sont valables dans le domaine temporel).

Les spectres des signaux réels sont centrés sur une pulsation centrale k_0 d'amplitude maximale, les autres pulsations spatiales sont réparties de part et d'autre de cette pulsation centrale k_0 avec des amplitudes d'autant plus faibles que la pulsation est éloignée de k_0 . Le « profil » du spectre est la courbe enveloppe qui délimite des amplitudes (profil gaussien, lorentzien...).

Simulation 1

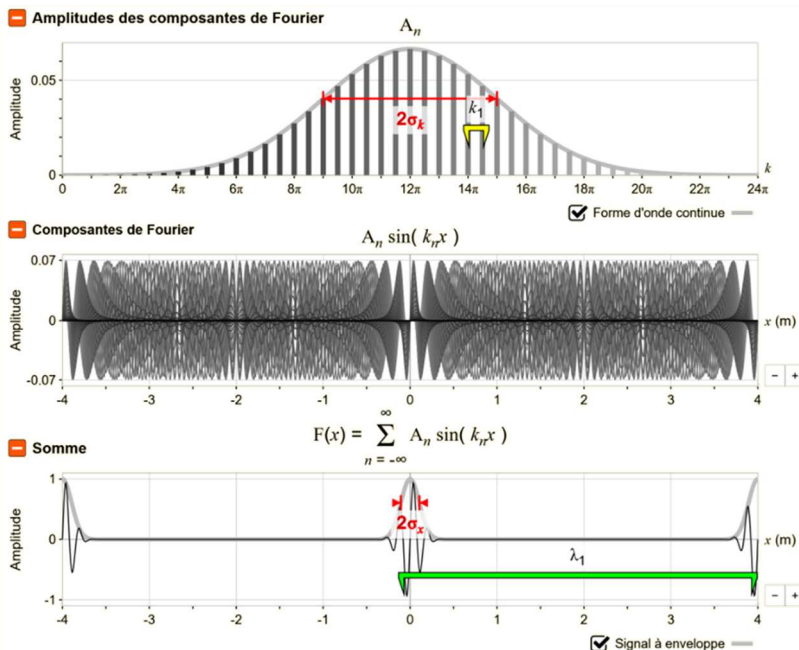


Spectre spatial discret de largeur spectrale « à mi-hauteur » $2\sigma_k$
 $\sigma_k = 9,42 \text{ rad.m}^{-1}$
 Pulsation spatiale centrale $k_0 = 12\pi$ et espacement entre deux composantes consécutives $k_1 = \pi$

Chaque courbe représente la sinusoïde associée à une valeur de k dans le spectre.

Représentation spatiale du signal à t donné.
 Signal résultant (somme de toutes les composantes) de largeur « à mi-hauteur » $2\sigma_x$
 $\sigma_x = 0,106 \text{ m}$
 Signal périodique de période $\lambda_1 = 2 \text{ m}$

Simulation 2 – Augmentation de la densité spectrale à largeur spectrale constante

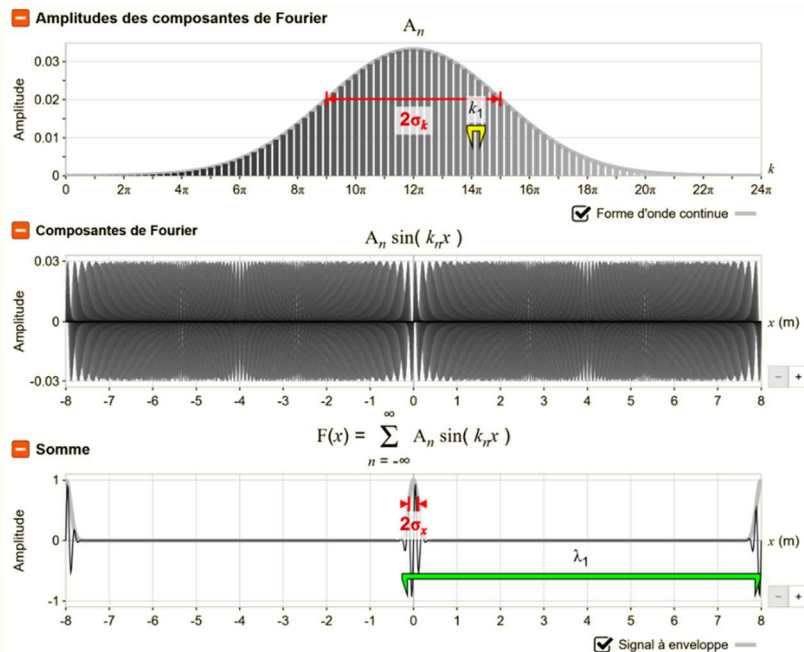


Spectre spatial discret de largeur inchangée mais plus dense : espacement entre deux composantes consécutives $k_1 = \pi/2$ plus faible que le précédent.

On conçoit en observant les différentes composantes que celles-ci vont s'annuler en moyenne sauf périodiquement lorsque leurs maxima coïncident.

Signal périodique de période $\lambda_1 = 4 \text{ m}$: la période spatiale augmente lorsque le spectre se densifie à largeur spectrale constante.

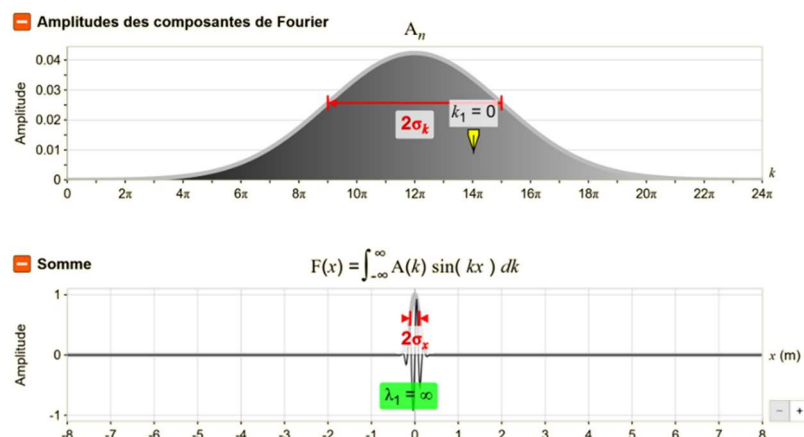
Simulation 3



Spectre spatial discret de largeur inchangée mais encore plus dense : $k_1 = \pi/4$.

Signal périodique de période $\lambda_1 = 8$ m plus grande.

Simulation 4 – Passage à la limite



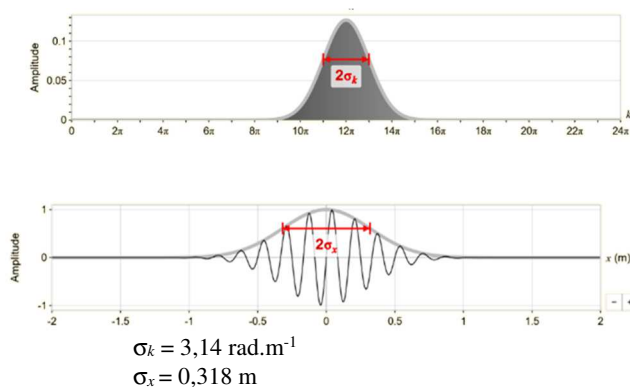
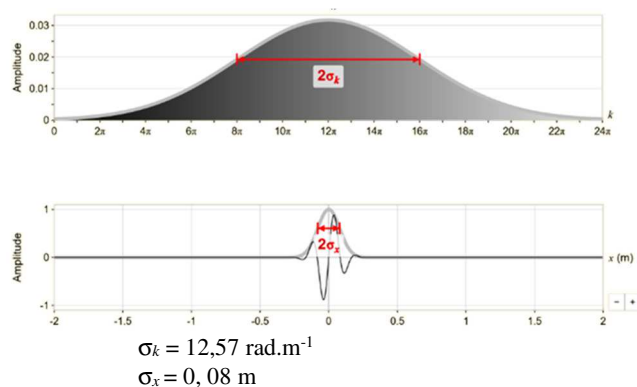
Spectre spatial *continu* ($k_1 = 0$) de largeur spectrale inchangée.

Signal de période *infinie* : signal *non périodique* donc limité dans l'espace.

Conclusion (simulations 1 à 4)

Une somme discrète ou série de Fourier est associée à un signal périodique dont la période croît lorsque la densité spectrale augmente. Une intégrale continue ou transformée de Fourier est associée à un signal d'extension spatiale ou temporelle limitée qui convient davantage pour représenter les phénomènes physiques réels.

Simulations 5 et 6 – Relation entre largeur spectrale et extension spatiale ou temporelle



Conclusion (simulations 1, 5 et 6) – Relations fondamentales de Fourier

L'extension spatiale σ_x ou Δx est inversement proportionnelle à la largeur spectrale σ_k ou Δk : $\Delta k \times \Delta x \approx 1$
 L'extension temporelle σ_t ou Δt est inversement proportionnelle à la largeur spectrale σ_ω ou $\Delta \omega$: $\Delta \omega \times \Delta t \approx 1$