Résumé

Équations différentielles

Équations du second ordre sans terme du 1er ordre (sans second membre)

Équations de la forme :

- ✓ $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + a\, f = 0$ ou encore $\ddot{f} + a\, f = 0$ admettant une solution *f(t)* fonction du temps *t*.
- ✓ $\dfrac{d^2 g}{dx^2} + a\, g = 0$ ou encore $g'' + a\, g = 0$ admettant une solution *g(x)* fonction d'une variable d'espace *x*.

Rq : le coefficient *a* n'a pas la même dimension dans les deux équations.

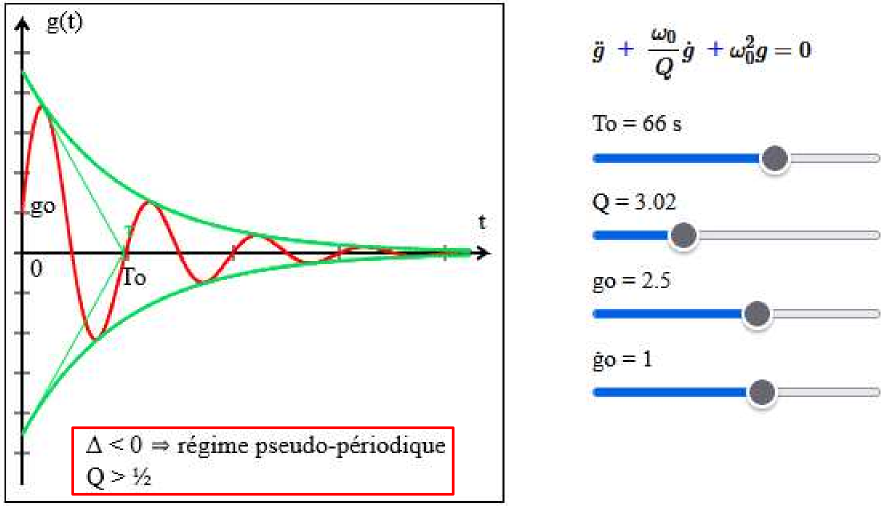
La ***forme*** des solutions (oscillatoire ou non) dépend uniquement du ***signe du coefficient a*** :

- ✓ $a > 0 \Rightarrow$ solution oscillatoire (i.e. exponentielles complexes) ; on pose alors $a = \omega^2$ ou $a = k^2$.
- ✓ $a < 0 \Rightarrow$ solution non oscillatoire (i.e. exponentielles réelles) ; on pose alors $a = -\ \omega^2$ ou $a = -\ k^2$.

Signe de a	***Équation différentielles***	***Solutions***			
$a > 0$	$\ddot{f} + \omega^2 f = 0$ En posant $\boldsymbol{a = \omega^2}$ où ω est la pulsation temporelle $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$	ou	$f(t) = \underline{A}\, e^{j\omega t} + \underline{B}\, e^{-j\omega t}$	Oscillateur harmonique
	$g'' + k^2 g = 0$ En posant $\boldsymbol{a = k^2}$ où *k* est la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	$g(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$		$g(x) = \underline{A}\, e^{jkx} + \underline{B}\, e^{-jkx}$	
		Ondes stationnaires	Critère de choix $\leftrightarrow$	Ondes incidente / réfléchie	
$a < 0$	$\ddot{f} - \omega^2 f = 0$ En posant $\boldsymbol{a = -\ \omega^2}$ où ω est la pulsation temporelle $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$f(t) = A\, e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$			~~Oscillateur~~
	$g'' - k^2 g = 0$ En posant $\boldsymbol{a = -\ k^2}$ où *k* est la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	$g(x) = A e^{kx} + B\, e^{-kx}$			

Rq : dans le cas de la forme complexe, les coefficients $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont complexes mais la solution finale est réelle et doit être exprimée sous forme réelle.

$$\ddot{g}+\frac{\omega_0}{Q}\,\dot{g}+\omega_0^2\,g=0$$



Solutions de la forme e^{rt} où r est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

$\Delta < 0 \Rightarrow r_1$ et r_2 complexes conjugués
$\Rightarrow e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ sont des exponentielles complexes
$\Rightarrow g(t)$ s'exprime à l'aide de fonctions sinusoïdales
$\Rightarrow g(t)$ est pseudo-oscillante

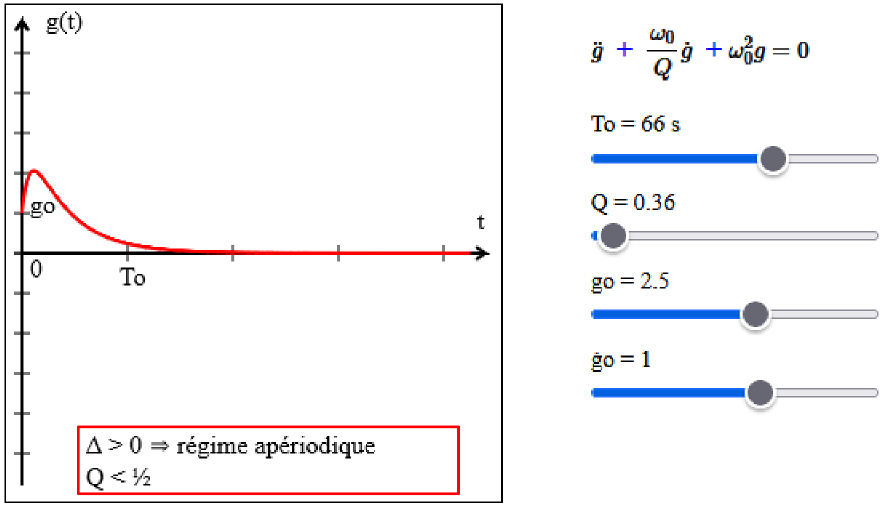
Coefficient du terme du 1er ordre $+\ \omega_0/Q > 0$
$\Rightarrow$ amortissement

Calculs :

Solutions E.C. : $r_{1/2}=-\frac{1}{\tau}\pm j\omega$

avec $\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_0}{2Q}$ et $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

$\Rightarrow \boxed{g(t)=e^{-t/\tau}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))}$



Solutions de la forme e^{rt} où r est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

$\Delta > 0 \Rightarrow r_1$ et r_2 réelles
$\Rightarrow e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ sont des exponentielles réelles
$\Rightarrow g(t)$ n'oscille pas

Coefficient du terme du 1er ordre $+\ \omega_0/Q > 0$
$\Rightarrow$ amortissement

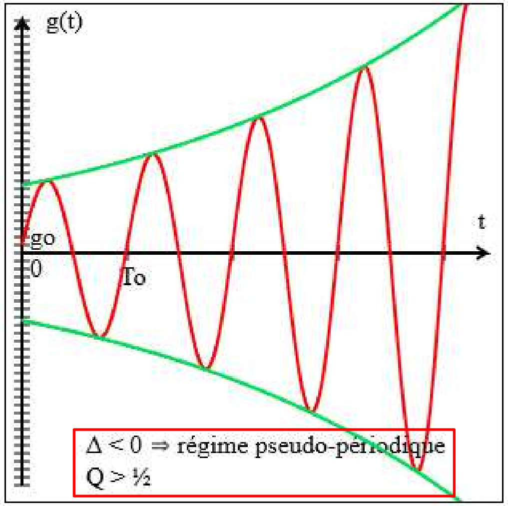
Calculs :

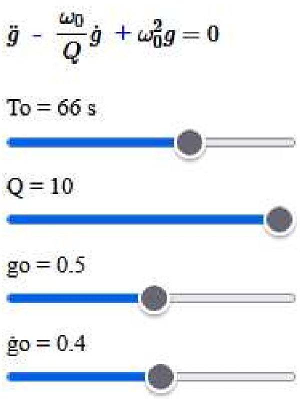
Solutions E.C. : $r_{1/2}=-\frac{1}{\tau}\pm j\omega$

avec $\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_0}{2Q}$ et $\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$

$\Rightarrow \boxed{g(t)=e^{-t/\tau}(Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t})}$

$$\ddot{g} - \frac{\omega_0}{Q}\dot{g} + \omega_0^2 g = 0$$





Solutions de la forme e^{rt} où r est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 - \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$\Delta < 0 \Rightarrow r_1$ et r_2 complexes conjugués

$\Rightarrow e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ sont des exponentielles complexes

$\Rightarrow g(t)$ s'exprime à l'aide de fonctions sinusoïdales

$\Rightarrow g(t)$ est pseudo-oscillante

Coefficient du terme du 1er ordre $-\omega_0/Q < 0$

$\Rightarrow$ amplification

Calculs :

Solutions E.C. : $r_{1/2} = +\frac{1}{\tau} \pm j\omega$

avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

$\Rightarrow \boxed{g(t) = e^{+t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}$

$$\ddot{g} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{g} - \omega_0^2 g = 0$$