Résumé

Écoulements parfaits : Euler et Bernoulli

Écoulement ***parfait*** = écoulement ***isentropique*** ($\eta = 0$, pas de viscosité)
Conséquences :
- pas de couche limite ;
- ***vitesse tangentielle non nulle sur les parois***.

Équation d'Euler (Leonhard Paul, 1755)

2ème loi de Newton appliquée à une ***particule fluide de volume*** $d\tau$ (de masse $dm = \mu d\tau$) dans un référentiel galiléen : $\mu d\tau \vec{a} = \mu d\tau \vec{g} - \overrightarrow{grad} P\, d\tau + d\vec{F}$ où $d\vec{F}$ désigne les forces autres que les forces de pression.

Équation d'Euler (écoulement ***parfait***, viscosité négligée) :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

ou

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v}\wedge\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

Dans un ***référentiel non galiléen***, il faut ajouter les densités volumiques :

$$\frac{d\vec{F}_{ie}}{d\tau} = -\mu\vec{a}_e \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{F}_{iC}}{d\tau} = -\mu\vec{a}_C = -2\mu\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}.$$

Vocabulaire

Écoulement incompressible : $\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow div\,\vec{v} = 0$.

Fluide incompressible (et indilatable) : μ indépendant de la pression et de la température.
On précise parfois fluide incompressible **et** homogène pour signifier que μ = constante (pas de mélange de fluides) (on a alors également $div\,\vec{v} = 0$).

Stratégie : nombre d'inconnues / nombre d'équations (rappel : 1 vecteur = 3 inconnues)

- Écoulement ***incompressible*** et ***homogène*** $\Rightarrow$ **4** inconnues : $\vec{v}$ et P ($\mu = cte$, connue)
  $div\,\vec{v} = 0$ (incompressible) + Euler = **4** équations permettant de déterminer les 4 inconnues $\vec{v}$ et P à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.
- Fluide compressible $\Rightarrow$ **5** inconnues : $\vec{v}$, P et μ
  Conservation masse + Euler + équation thermodynamique (écoulement isentropique) = **5** équations permettant de déterminer les 5 inconnues $\vec{v}$, P et μ à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.

Théorème de Bernoulli (Daniel, 1738)

*Abréviation : écoulement **P.S.I.H. = Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène**.*

Il existe différents théorèmes de Bernoulli en fonction des hypothèses effectuées.
Leurs démonstrations reposent toujours sur une intégration de l'équation d'Euler.

Écoulement P.S.I.H. et irrotationnel (potentiel)

L'équation d'Euler se réduit à : $\mu\,\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \mu\vec{g}$.

En rassemblant tous les termes : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz\right) = \vec{0}$

***Théorème de Bernoulli* pour un écoulement P.S.I.H. irrotationnel** ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$)

$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = C_{fluide}$ où C_{fluide} est une constante indépendante du point M dans le fluide.

Écoulement P.S.I.H. et tourbillonnaire

En multipliant l'équation d'Euler par un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ ***colinéaire à une ligne de champ*** ($d\vec{\ell}\ //\ \vec{v}$), on a $\left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\wedge\vec{v}\right)\cdot d\vec{\ell} = 0$. On intègre alors entre deux points A et B appartenant à cette ligne de champ (en utilisant $\overrightarrow{grad} f \cdot d\vec{\ell} = df$, par définition du gradient).

***Théorème de Bernoulli* pour un écoulement P.S.I.H. tourbillonnaire** ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v} \neq \vec{0}$)

$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = C_{ligne}$ où C_{ligne} est une constante qui dépend de la ligne de courant.

En pratique : $\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu} + gz_B$ (A et B appartenant à la même ligne de courant).

Écoulement quelconque : 1er principe pour les écoulements (cf. thermodynamique)

$\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$ où w_u est le travail autres que le travail des forces de pression amont/aval et des forces dérivant d'une énergie potentielle : travail lié aux parties mécaniques en mouvement (turbines, compresseurs…).

$$D_m\left[(h_s + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s) - (h_e + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e)\right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$ où D_m est le débit massique.

Avec $h = u + Pv = u + P/\mu$, enthalpie massique du fluide (u énergie interne massique).
Pour un écoulement ***PSIH***, cette expression se simplifiera (cf. chapitre « Bilans macroscopiques »).