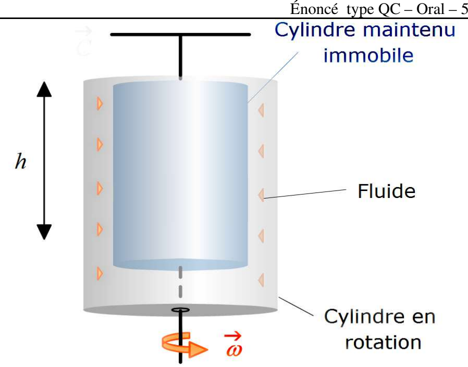
Viscosimètre (ou rhéomètre) de Couette

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Le cylindre intérieur est suspendu à un fil de torsion alors que le cylindre extérieur tourne à vitesse angulaire constante.

L'angle d'équilibre donne accès à la viscosité du fluide contenu entre les deux cylindres.



Animation : http://gev.industrie.gouv.fr/gev-mecaflu/mecaflu/s7/p01_mecaflu_s7.htm

Énoncé détaillé

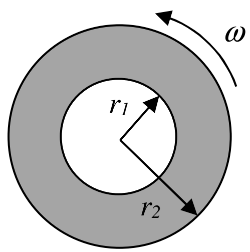
Modélisation

On envisage le dispositif représenté ci-contre.

Un liquide homogène, incompressible, de viscosité η, de masse volumique μ et de viscosité cinématique ν, se trouve entre deux cylindres coaxiaux de hauteur L et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$.

Le cylindre intérieur (1) est suspendu à un fil de torsion exerçant sur lui un moment $-C\alpha$ lorsqu'il tourne d'un angle α autour de son axe Oz.

Le cylindre extérieur (2) tourne à vitesse angulaire constante ω sous l'effet d'un couple moteur $\Gamma\,\vec{e}_z$.



En régime stationnaire, le cylindre intérieur s'immobilise en tournant d'un angle α_{eq} par rapport à sa position initiale.

Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ est uniforme.

On néglige les effets de bords au fond des cylindres ($z = 0$) et au sommet ($z = L$) des cylindres : en particulier, on renonce à y écrire des conditions aux limites sur le champ des vitesses.

1. **Analyse physique**
   Que peut-on prévoir quant à la dépendance de l'angle α_{eq} vis-à-vis des paramètres du problème ?
   Quelle loi paraît indiquée pour relier ces paramètres ?
2. **Symétries, invariances et propriétés locales**
   On admet que le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v_\theta(r)\,\vec{e}_\theta$ et que le champ de pression est de la forme $P(r)$.
   Justifier l'absence du paramètre θ dans ces expressions.
   Quelle hypothèse simplificatrice (approximation) permet de considérer que la pression est indépendante de z ?
   Rq : il est possible d'établir ces résultats mais leur justification rigoureuse réclame quelques explications ; on souhaite dans cet exercice aller à l'essentiel (question 3) en laissant certains aspects de côté et en adoptant des hypothèses simplificatrices.
3. **Théorème du moment cinétique**
   On admet que, pour cet écoulement à symétrie cylindrique, l'expression de la force de viscosité exercée sur un élément de surface $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_r$ par le fluide situé au-delà de r sur le fluide en deçà de r devient :
   $$d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) dS\,\vec{e}_\theta\,.$$
   a. Calculer le moment élémentaire $d\Gamma_z$ de cette force $d\vec{F}$ par rapport à l'axe Oz.
   b. En déduire que le moment total par rapport à Oz des forces exercées sur le cylindre de rayon r par le fluide situé au-delà de r sur le fluide en deçà de r vaut :
   $$\Gamma(r) = 2\pi\eta r^3 L \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right).$$
   c. Que peut-on dire du moment cinétique du fluide contenu dans un volume limité par deux cylindres concentriques de rayons r et $r+dr$?
   En appliquant le théorème du moment cinétique au fluide contenu dans ce volume, justifier que $\Gamma(r)$ ne dépend pas de r : il s'agit donc d'une constante notée Γ.
   Rq : l'écriture du théorème du moment cinétique utiliserait la dérivée et non la dérivée particulaire car le système est « emprisonné » à l'intérieur des deux cylindres, il n'y a donc pas lieu de tenir compte d'une éventuelle dérivée convective.
   d. En déduire l'expression de $v_\theta(r)$ en fonction de Γ, r et r_1 en exploitant les conditions aux limites imposées par les cylindres pour éliminer les constantes inconnues.
   e. En déduire l'expression du moment Γ par rapport à Oz des forces exercées sur le cylindre intérieur en fonction de η, r_1, r_2, L et ω.
   f. Justifier que la mesure de α_{eq} permet celle de η.
   g. Quel est l'intérêt d'avoir plusieurs vitesses de rotation ω sur un même appareil ?
4. **Équation de Navier-Stokes**
   Projeter l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
   Interpréter la première équation.
   Pourquoi ne projette-t-on pas suivant $\vec{e}_z$?
   Rq : la seconde équation permet de retrouver le champ des vitesses (moyennant un certain savoir-faire).
5. **Compléments**
   En négligeant la pesanteur, on est conduit à négliger le gradient axial de pression (i.e. suivant Oz). On comprend alors que la vitesse ne peut pas posséder de composante suivant Oz.
   Il reste donc à montrer que la vitesse ne possède pas de composante suivant r.
   On parvient à ce résultat en utilisant le caractère incompressible du fluide qui permet d'écrire $div\,\vec{v} = 0$.