

Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

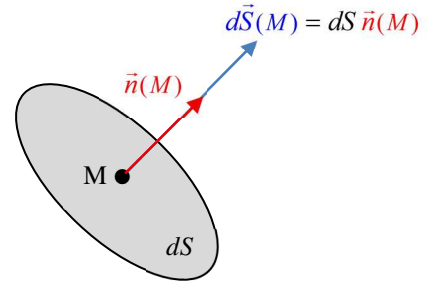
Vecteur surface

Soit une surface mésoscopique dS dite « élémentaire » (cet élément de surface appartient à une surface finie).

Le **vecteur surface élémentaire** $d\vec{S}(M)$ est défini par :

$$d\vec{S}(M) = dS \vec{n}(M)$$

Où $\vec{n}(M)$ est le **vecteur unitaire normal** à la surface dS au point M .



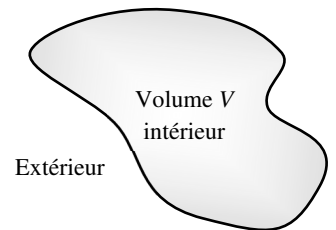
Orientation du vecteur surface

Surface fermée

Une surface S est **fermée** si elle délimite un **volume** V (le système) : cette surface délimite donc un espace **intérieur** (le volume V) et un espace **extérieur** ; il est impossible de passer du volume intérieur à l'espace extérieur sans traverser la surface frontière S .

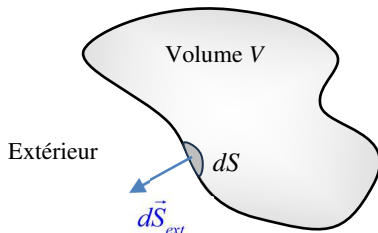
On démontre que pour une surface fermée, la somme de tous les vecteurs surface est nulle :

$$\oint_{M \in S} d\vec{S}(M) = \vec{0} \quad (\text{intuitif pour une sphère, un cylindre, un cube...}).$$

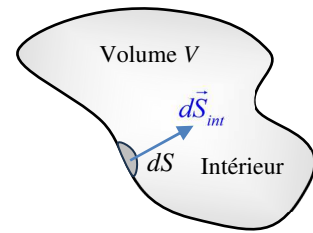


Il existe deux conventions différentes pour l'orientation du vecteur $d\vec{S}(M)$ utilisées dans deux domaines différents de la physique.

Electromagnétisme – Flux sortant



Thermodynamique – Flux entrant



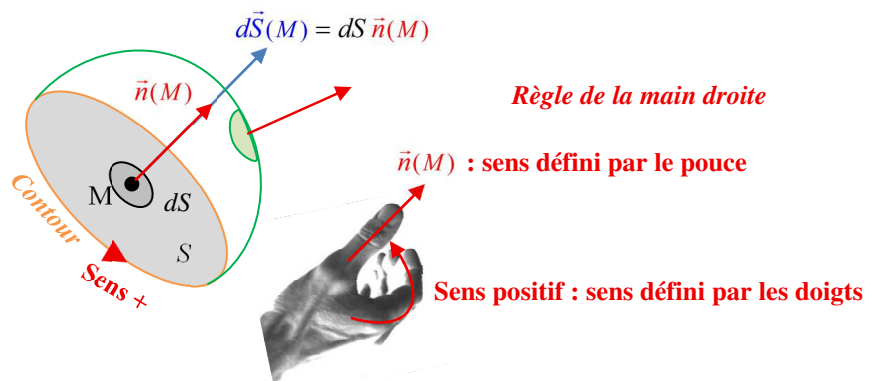
Convention dite du « porte-monnaie »
(les flux entrant sont comptés positivement)

Surface définie par un contour orienté

Certaines lois physiques (loi de l'induction de Faraday, théorème d'Ampère...) nécessitent de définir des conventions de signes liant un contour orienté au vecteur surface d'une surface « posée » sur ce contour (par exemple, une bulle de savon en formation sur un anneau).



Une fois choisi le **sens positif** (arbitraire) sur le **contour**, le sens du vecteur surface (ou du vecteur unitaire normal) est donné par la règle de la main droite **quelle que soit la forme de la surface posée sur le contour** (ci-contre, surface plane grise ou « bulle de savon » verte).



Règle de la main droite

$\vec{n}(M)$: sens défini par le pouce

Sens positif : sens défini par les doigts

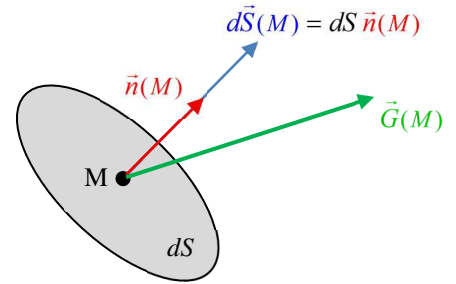
Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Intuitivement un flux représente une grandeur traversant une surface. Plus précisément une grandeur associée à un **champ vectoriel**.

Le **flux élémentaire** du champ de vecteur $\vec{G}(M)$ à travers la surface mésoscopique dS « centrée » au point M est :

$$d\phi = \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Où $d\vec{S}(M)$ est le **vecteur surface élémentaire** au point M .



Le **flux total** du champ de vecteur $\vec{G}(M)$ à travers la surface quelconque S est :

$$\phi_S(\vec{G}) = \iint_{M \in S} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Le **flux total** du champ de vecteur $\vec{G}(M)$ à travers la surface S **fermée** est :

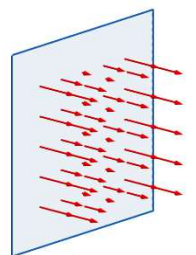
$$\phi_S(\vec{G}) = \oiint_{M \in S} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) \quad \text{où } d\vec{S} = d\vec{S}_{ext} \text{ est dirigée de l'intérieur vers l'extérieur en électromagnétisme}$$

$$\phi_S(\vec{G}) = \oiint_{M \in S} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_{int}(M) \quad \text{où } d\vec{S} = d\vec{S}_{int} \text{ est dirigée de l'extérieur vers l'intérieur en thermodynamique}$$

💡 Le flux dépend donc de l'orientation relative du champ et du vecteur surface :

Flux de $\vec{G}_{(M)}$ à travers S maximal : <i>normale et champ parallèles</i>	Situation intermédiaire	Flux de $\vec{G}_{(M)}$ à travers S nul : <i>normale et champ orthogonaux</i>

⚠ Si le champ n'est pas uniforme sur la surface de calcul, il faut exprimer dS dans le système de coordonnées adapté au problème (cf. exemples de calcul).



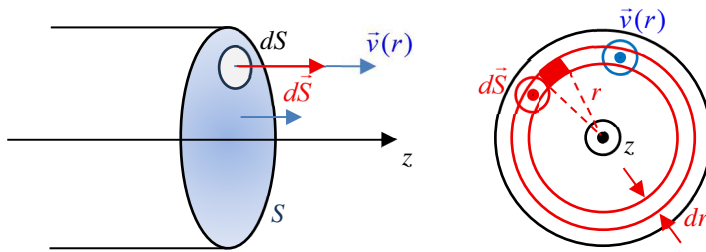
Expressions de dS et $d\tau$, surfaces et volumes élémentaires, dans les systèmes de coordonnées usuels

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques

Exemple 1 (mécanique des fluides) : champ non uniforme – Calcul d’une intégrale obligatoire

Le champ des vitesses dans un tuyau cylindrique d’axe (Oz) et de rayon R pour un liquide visqueux est donné en coordonnées cylindriques par : $\vec{v}(M) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z$ en un point M à la distance r de l’axe.

On cherche le flux de $\vec{v}(M)$ à travers la section S du tuyau.



La surface élémentaire dS (en rouge) adaptée aux coordonnées polaires dans le plan de section du tuyau est $dS = dr \times r d\theta$ et $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$.

Le flux élémentaire de $\vec{v}(M) = v(r) \vec{e}_z$ à travers dS est donc

$$d\phi = v(r) \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \vec{e}_z = v(r) dS$$

$$\text{D'où } \phi_S(\vec{v}) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} v(r) r dr d\theta = \int_{r=0}^R v(r) r dr \times \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

 Compte tenu des symétries ($\vec{v}(r)$ est indépendant de θ), il est possible de choisir une surface élémentaire « un peu plus grande », $dS = 2\pi r dr$ qui est la surface de la petite couronne d’épaisseur dr sur le schéma ci-dessus (de périmètre intérieur $2\pi r$).

L’épaisseur de la couronne étant très faible, on assimile celle-ci à un rectangle de côtés dr et $2\pi r$ d’où dS .

Il est alors possible d’écrire directement : $\phi_S(\vec{v}) = \int_{r=0}^R v(r) 2\pi r dr$ (intégrale simple au lieu d’intégrale double).

La suite n’est que calcul...

Exemple 2 (électrostatique) : champ non uniforme mais hautement symétrique – Calcul d’une intégrale inutile

Le champ électrostatique créé en point M situé à la distance r d’une charge q placée en O est donné en coordonnées sphériques par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

On cherche le flux de $\vec{E}(M)$ à travers une sphère de rayon r centrée en O.

L’expression de la surface élémentaire sur une sphère de rayon r en coordonnées sphériques, $dS = r d\theta \times r \sin \theta d\phi$, est ici inutile.

Seule l’information $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ est nécessaire comme le prouve le calcul du flux ; en effet le champ et le vecteur normal sont colinéaires en tout point de la surface et la norme du champ est constante sur la surface puisqu’elle ne dépend que de r et que, par définition, $r = \text{constante}$ sur une sphère de rayon r .

$$\phi_S(\vec{E}) = \iint_{M \in S} E(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r = \iint_{M \in S} E(r) dS \stackrel{E(r)=cte}{=} E(r) \iint_{M \in S} dS = E(r) S_{\text{sphère}} = E(r) \times 4\pi r^2$$

On trouve donc, sans calcul d’intégrale, $\phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$.

Cf. document Disque – Cylindre – Sphère pour les aires et les volumes.