Un modèle simplifié de tornade

Une tornade est un vortex (tourbillon) de vents extrêmement violents, prenant habituellement naissance à la base des cumulonimbus fortement orageux qui sont les seuls à en produire **(Voir Figure 3)**. Il s'agit d'un phénomène météorologique au pouvoir destructeur qui peut être très grand.

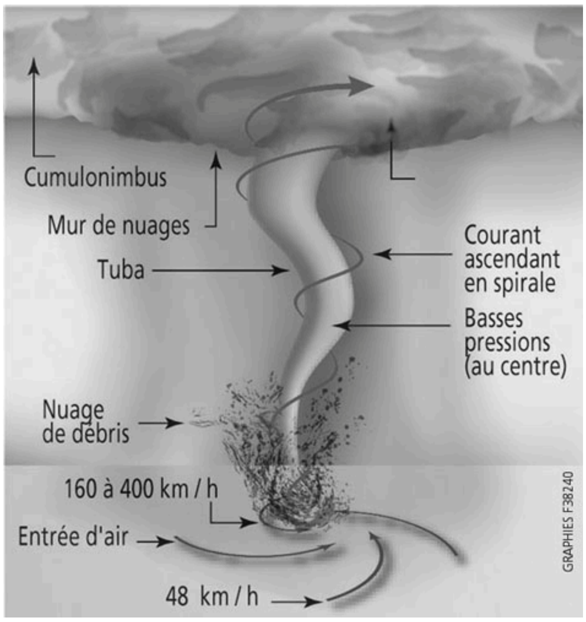

Figure 3 - Une tornade

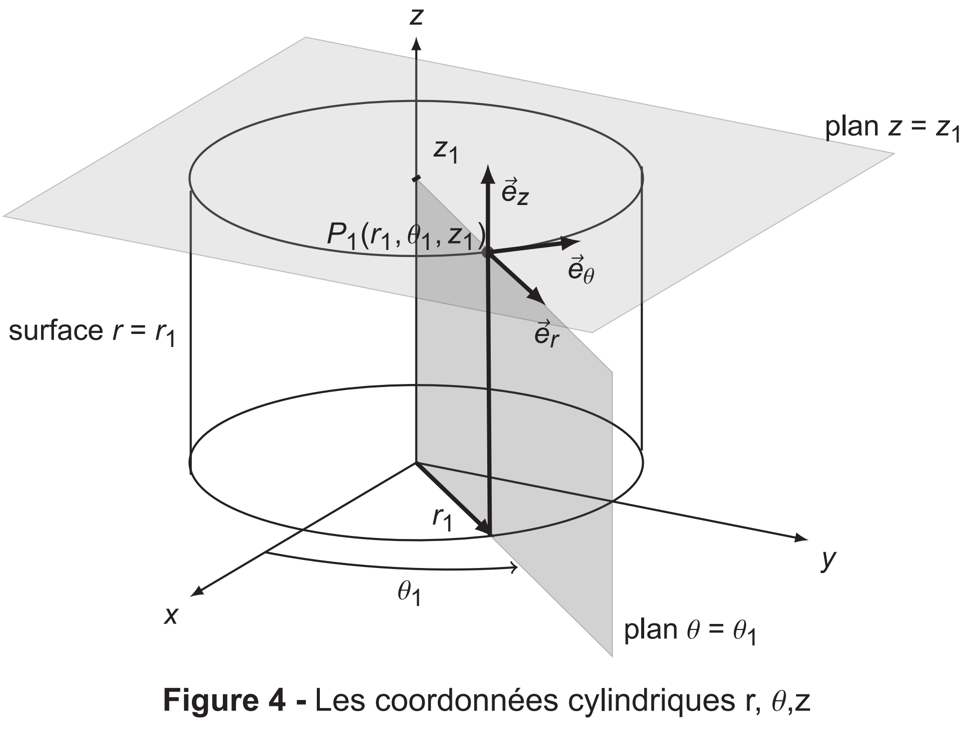

Figure 4 - Les coordonnées cylindriques r, θ,z

Dans ce problème la tornade est modélisée par un vortex cylindrique de rayon R et d'axe Oz.**(Voir Figure 4)**

L'écoulement d'air sera considéré comme parfait, incompressible, homogène et stationnaire.

Le champ de vitesse est décrit par la relation $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e_\theta}$ et un vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ tel que $\vec{\Omega} = \Omega_0\vec{e_z}$ pour $0 \leqslant r \leqslant R$ et $\vec{\Omega} = \vec{0}$ pour $r > R$.

Les effets de la pesanteur seront négligés et la masse volumique de l'air sera notée μ.

Q11. Quelle est l'expression du vecteur tourbillon ? Que représente qualitativement ce vecteur au niveau local ?
Dans quel cas ce vecteur est-il nul ? Comment est alors caractérisé l'écoulement correspondant ?

Q12. Définir les expressions suivantes figurant dans l'énoncé : écoulement parfait, écoulement homogène et incompressible, écoulement stationnaire.

Q13. Rappeler la définition d'une ligne de courant. Quelle est la nature de ces lignes de courant dans la cas du modèle de la tornade adopté ? Représenter quelques unes de ces lignes de façon lisible.

Q14. Établir les expressions de la vitesse $v_\theta(r)$ dans les deux domaines considérés.
On précise que la vitesse est continue dans le domaine dans lequel elle est définie de même qu'en $r = R$, que $v_\theta(r = 0) = 0$ et que $v_\theta(r) \longrightarrow 0$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$.

Q15. Représenter graphiquement ses variations en fonction de r. Proposer une analogie magnétique.

Q16. On s'intéresse au champ de pression dans le domaine $r > R$.
On suppose que la pression loin de la tornade est égale à la pression atmosphérique $P(r = \infty) = P_a$.
Que peut-on dire de l'écoulement pour ces valeurs de r ?
Que peut-on en déduire pour la relation de Bernoulli ? Préciser son champ d'application dans ce cas.

Q17. Établir alors l'expression de $P(r)$ pour $r > R$.

Q18. On s'intéresse au champ de pression dans le domaine $0 \leqslant r \leqslant R$.
Que peut-on dire de l'écoulement pour ces valeurs de r ?
Que peut-on en déduire pour la relation de Bernoulli ?
Expliquer alors pourquoi cette relation n'est pas intéressante pour trouver l'expression de $P(r)$ dans ce domaine. Préciser son champ d'application dans ce cas.

Q19. Établir l'expression de $P(r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant R$ en utilisant le relation d'Euler.

Q20. On appelle dépression $P(r) - P_a$.
Préciser ses expressions dans le cas étudié.
Pour quelle valeur de r la valeur de $|P(r) - P_a|$ est-elle la plus élevée ?
Commenter.

Données
Gradient en coordonnées cylindriques $\overrightarrow{grad}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ Rotationnel en coordonnées cylindriques $\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial f_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial (r f_\theta)}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dfrac{\partial f_r}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r f_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$ Accélération convective $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$