

Théorie des jeux

Game Theory

La *théorie des jeux* est un domaine des mathématiques qui propose une description formelle *d'interactions stratégiques* entre *agents* (appelés « joueurs »).



- 💡 Grande variété de modèles adaptés à des situations très diverses moyennant des hypothèses nombreuses $\Rightarrow$ cadre d'analyse
- ⚠️ Interprétations en situation réelle

<https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/entendez-vous-l-eco/la-theorie-des-jeux-7092769>

Russell Crowe dans le film biopic sur Nash "un homme d'exception" (2001) de Ron Howard

Théorie des jeux – Applications

Sciences sociales



Biologie
évolutionniste

Sport



Sciences Politiques



Analyse stratégique



Relations internationales



Compétition électorale

Appariement



Théorie des jeux – Aspects historiques



Ernst Zermelo
1920



Émile Borel
1938



Théorème du minimax
Jeux à somme nulle à deux joueurs

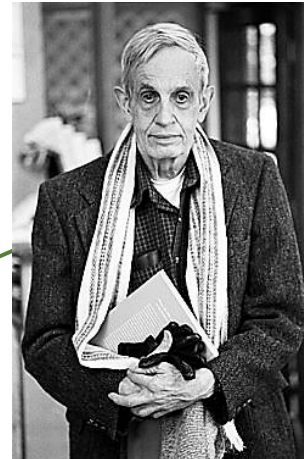
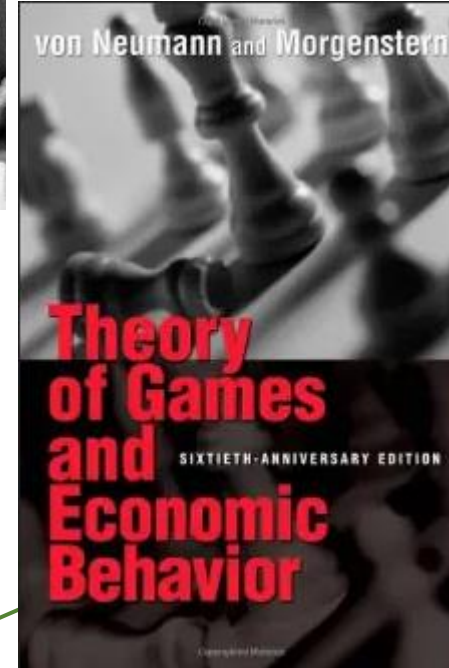


Oskar Morgenstern



John von Neumann

1944



John Forbes Nash
Equilibre de Nash (1950)

Théorie des jeux – Eléments de classification des jeux

Dans les *jeux coopératifs*, on étudie la formation de coalitions entre les joueurs afin d'obtenir de meilleurs résultats pour leurs membres.

On appelle *jeu à somme nulle* ou jeu strictement compétitif, les jeux à deux joueurs dans lesquels l'intérêt de l'un des deux joueurs est strictement opposé à l'intérêt de l'autre joueur



Jeu séquentiel



Jeu simultané



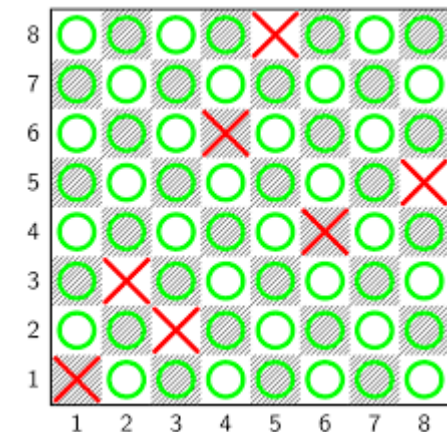
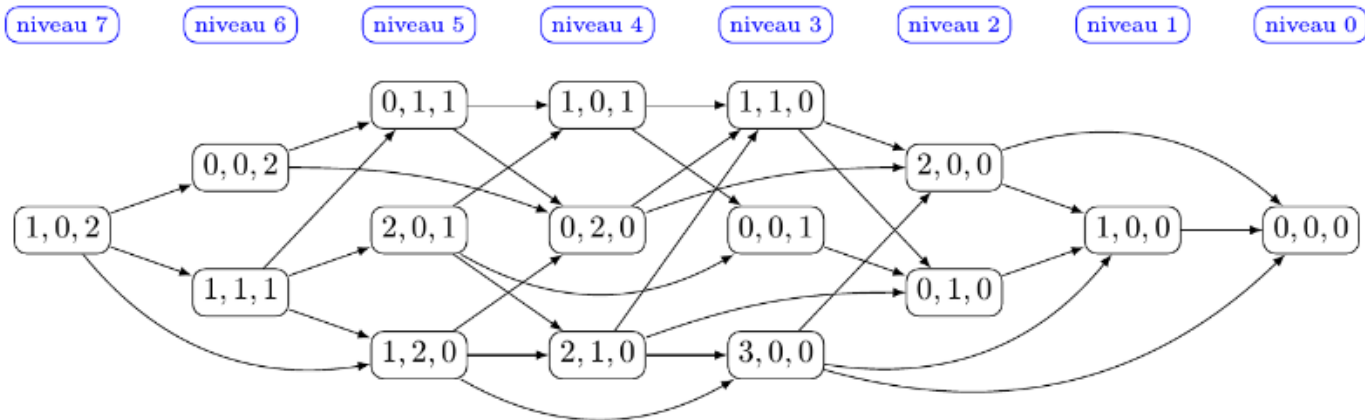
On dit qu'un jeu est à *information complète* si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :

- ses possibilités d'action ;
- les possibilités d'action des autres joueurs ;
- les gains résultants de ces actions ;
- les motivations des autres joueurs.

Les jeux en information incomplète sont des situations où l'une des conditions n'est pas vérifiée (la plupart des jeux de carte). Ce peut être parce qu'une des motivations d'un acteur est cachée (domaine important pour l'application de la théorie des jeux à l'économie).

Théorie des jeux – But du jeu...

L'objectif de tout joueur est la recherche d'une
stratégie gagnante !



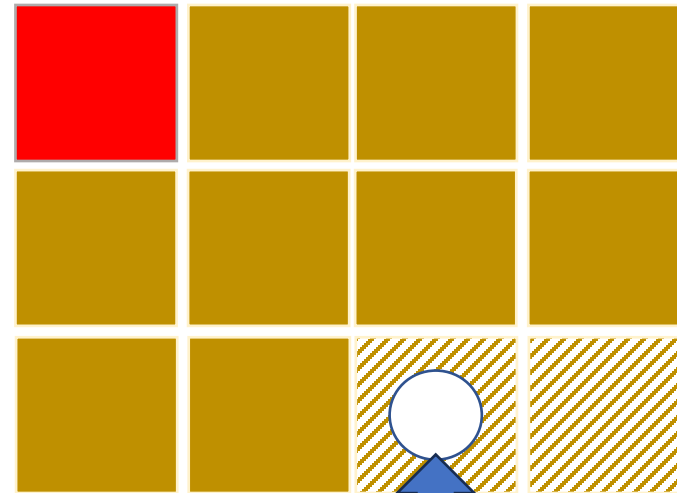
Théorie des jeux – Exemple : jeu de Chomp (ℓ, c)

Le coin supérieur gauche d'une tablette de chocolat rectangulaire (ℓ lignes et c colonnes) est empoisonné.

Chaque joueur choisit à tour de rôle un carré et le mange *ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carré choisi*.

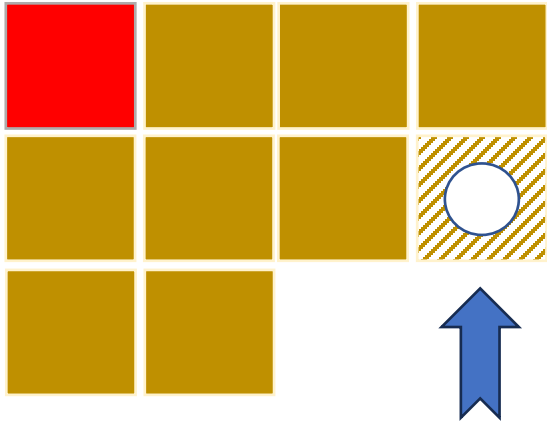
Le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carré empoisonné a perdu.

Exemple de partie de Chomp (3,4) :

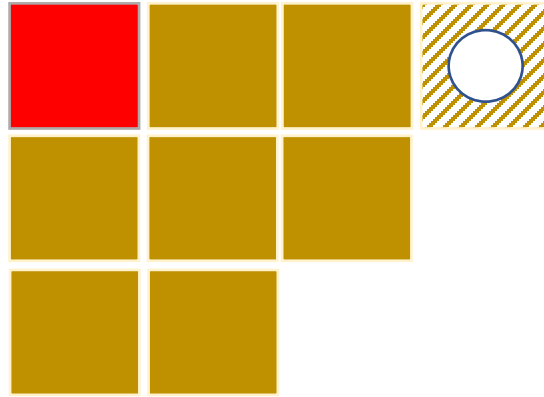


Le joueur J_1
joue

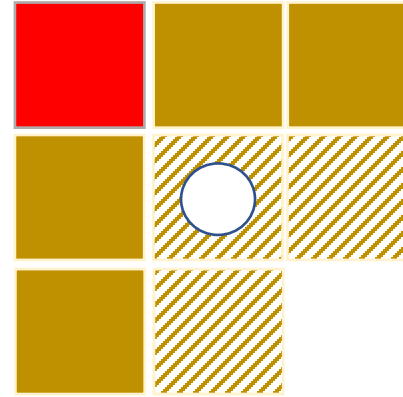
Théorie des jeux – Exemple : jeu de Chomp (ℓ, c)



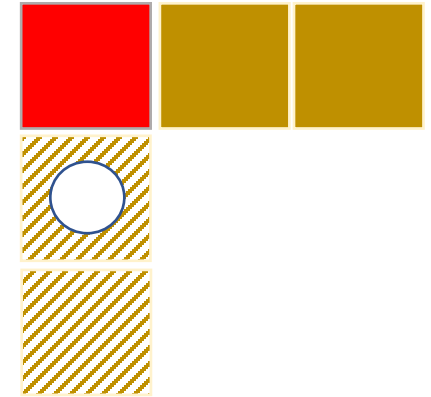
Le joueur J_2
joue



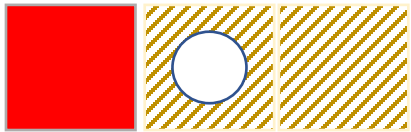
Le joueur J_1
joue



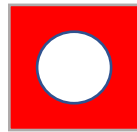
Le joueur J_2
joue



Le joueur J_1
joue



Le joueur J_2
joue



Le joueur J_1
perd

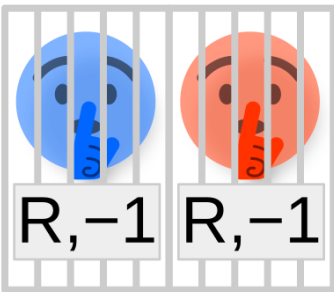
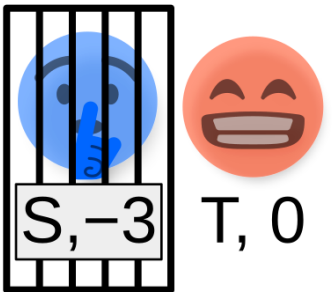
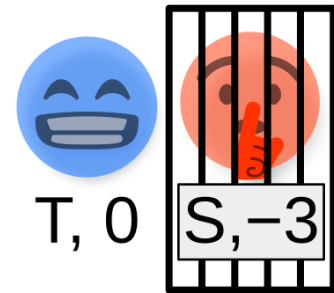
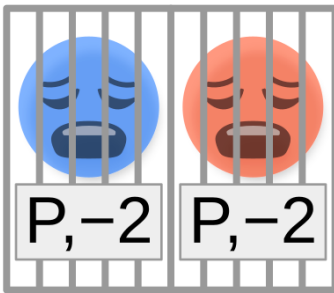
Ce jeu est *séquentiel* (deux joueurs jouent en alternance), il est *déterministe* (sans hasard), à *information complète* (règles et situation connues à tout instant), il ne peut y avoir ni match nul ni partie infinie, il est à *somme nulle* (ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre).

Existe-t-il une stratégie gagnante ?

Théorie des jeux – Dilemme du prisonnier : jeu à information incomplète

https://fr.wikipedia.org/wiki/Dilemme_du_prisonnier

Deux suspects sont arrêtés par la police.
Mais les agents n'ont pas assez de preuves pour les inculper, donc ils les interrogent séparément en leur faisant la même offre.
« Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre écoperà de dix ans de prison.
Si tu le dénonces et que lui aussi te dénonce, vous écoperiez tous les deux de cinq ans de prison.
Si personne ne dénonce l'autre, vous serez condamnés tous les deux à six mois de prison. »

		B	
		A	
A	B stays silent	 R, -1 R, -1	 S, -3 T, 0
	B testifies	 T, 0 S, -3	 P, -2 P, -2

Chacun des prisonniers choisira probablement *individuellement* d'accuser l'autre alors que, *collectivement*, ils gagneraient à coopérer en se taisant : chacun est fortement incité à tricher, ce qui constitue le cœur du dilemme (jeu à information incomplète car un joueur ignore les motivations de l'autre).

Théorie des jeux – Problème de Monty Hall – Dénombrement, probabilités

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Monty_Hall

<https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Hall/hall.html>

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur).

Le joueur est placé devant trois portes fermées.

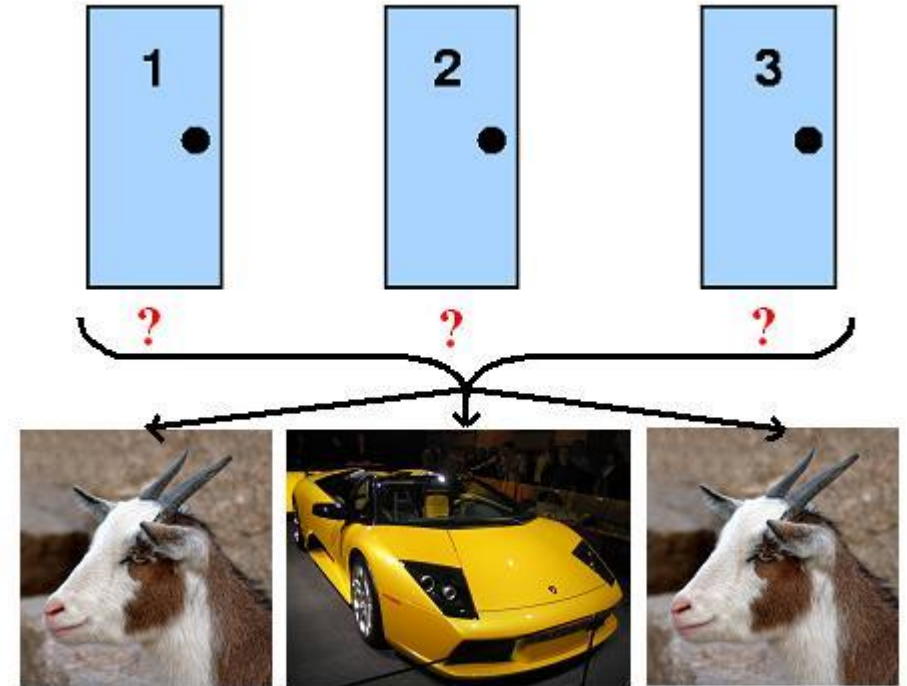
Derrière l'une d'entre elles, se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre.

Le joueur doit tout d'abord désigner une porte.

Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début).

Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

S'il ouvre la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il l'emporte.



Les questions qui se posent au candidat sont :

Que doit-il faire : modifier ou non son choix initial ?

Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?