Théorie des jeux – Game Theory

Définition

La ***théorie des jeux*** est un domaine des mathématiques qui propose une description formelle d'interactions stratégiques entre agents (appelés « joueurs »).

Les fondements mathématiques de la théorie moderne des jeux sont décrits autour des années 1920 par Ernst Zermelo et par Émile Borel.
Dans son ouvrage de 1938, *Applications aux Jeux de Hasard*, Émile Borel développe un théorème du ***minimax*** pour les ***jeux à somme nulle à deux joueurs***, c'est-à-dire les jeux dans lesquels ce que gagne l'un est perdu par l'autre.
Ces idées sont ensuite développées par Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944 dans leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* qui est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne. Il s'agissait de modéliser les jeux à somme nulle où la somme des gains entre les joueurs est toujours égale à zéro. La théorie des jeux devient dès ce moment un outil théorique important de la microéconomie.

Applications

Les concepts de la théorie des jeux sont fréquemment utilisés en **analyse économique**. Depuis les années 1980, la théorie des jeux est devenue un outil standard de la science économique. Onze théoriciens des jeux ont obtenu le « prix Nobel d'économie » depuis 1944.
Outre le champ de l'économie, la théorie des jeux trouve des applications dans les **sciences sociales**, les **sciences politiques**, dans **l'analyse stratégique** comme en relations internationales ou en théorie des organisations et en **biologie évolutionniste**.
La théorie des jeux est également fondamentale dans la théorie des enchères.
Les économistes David Gale et Lloyd Shapley utilisent la théorie des jeux coopératifs pour étudier **l'appariement** des étudiants et des universités ainsi que l'appariement des hommes et des femmes sur le marché du mariage.
La théorie des jeux a également été appliquée en économie du **sport**, que ce soit à propos du football, du tennis ou du cyclisme.
La théorie des jeux a été appliquée en sciences politiques dès les années 1950 avec les travaux de Downs sur la **compétition électorale**.
Des chercheurs ont utilisé la stratégie des jeux pour mieux comprendre l'évolution du comportement des espèces face à la modification de leur environnement, il s'agit de la théorie des jeux évolutionnistes. Plus précisément, la théorie des jeux est parfois utilisée pour identifier les stratégies pour lesquelles le gain (mesuré en survie et/ou reproduction) est le plus élevé.

Eléments de classification des jeux

La théorie des jeux classifie les jeux en catégories en fonction de leurs approches de résolution.

Dans les ***jeux coopératifs***, on étudie la formation de coalitions entre les joueurs afin d'obtenir de meilleurs résultats pour leurs membres.

On appelle ***jeu à somme nulle*** ou ***jeu strictement compétitif***, les jeux à deux joueurs dans lesquels l'intérêt de l'un des deux joueurs est strictement opposé à l'intérêt de l'autre joueur.
Les échecs, le tarot ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains de l'un des joueurs sont très exactement les pertes de l'autre. Le jeu pierre-feuille-ciseaux est un autre exemple de jeu à somme nulle.

Dans un ***jeu simultané***, les joueurs décident en même temps de leur stratégie (exemple : le jeu pierre-feuille-ciseaux).
Dans un ***jeu séquentiel***, on peut spécifier l'ordre des décisions de sorte qu'un joueur peut décider de sa stratégie conditionnellement à ce qu'ont joué les autres joueurs précédemment (exemple : le jeu d'échecs et le jeu de go).

On dit qu'un jeu est à ***information complète*** si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :

- ses possibilités d'action ;
- les possibilités d'action des autres joueurs ;
- les gains résultants de ces actions ;
- les motivations des autres joueurs.

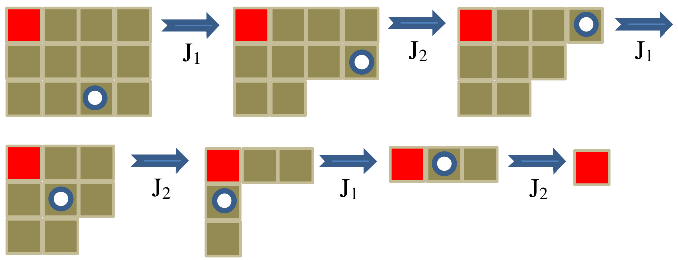
Les jeux en information incomplète sont des situations où l'une des conditions n'est pas vérifiée (la plupart des jeux de carte). Ce peut être parce qu'une des motivations d'un acteur est cachée (domaine important pour l'application de la théorie des jeux à l'économie).

✔ ***L'objectif de tout joueur est la recherche d'une stratégie gagnante !***

Exemple – Jeu de Chomp

Le jeu de Chomp (ℓ, c) se joue à l'aide d'une tablette de chocolat rectangulaire (ℓ lignes et c colonnes) dont le coin supérieur gauche est empoisonné.
Chaque joueur choisit à tour de rôle un carré (matérialisé par un disque blanc ci-dessous) et le mange *ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carré choisi*.
Bien évidemment, le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carré empoisonné a perdu.

Exemple de partie de Chomp (3,4) perdue par le joueur J_1 qui a commencé à jouer :



J_1 doit prendre le carré empoisonné, il perd.
A ce jeu, *deux* joueurs jouent en alternance (jeu *séquentiel*), il est *déterministe* (sans hasard), à *information complète* (règles et situation connues à tout instant), il ne peut y avoir *ni match nul ni partie infinie*, il est *à somme nulle* (ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre).

Graphes – Rappels pcsi et compléments (notions illustrées sur un exemple p. 3)

Graphes

Graphe : couple G = (S, A) où

- S est un ensemble dont les éléments s sont appelés ***sommets*** ou ***nœuds*** du graphe ;
- A est un sous-ensemble de S × S, dont les éléments sont appelés ***arêtes*** ou ***arcs*** du graphe (i.e. paires d'éléments notées $a = (s, s')$).

Sommets s et $s' \in$ S ***voisins*** ou ***adjacents*** : il existe un arc $a = (s, s')$ reliant s et s'.

Graphe orienté : les arcs sont orientés (parcourus dans un seul sens et représentés par une flèche). Si $a = (s, t) \in$ A est un arc de G, le sommet s est dit ***origine*** et le sommet t est dit ***extrémité*** de a.

Successeurs de $s \in$ S : extrémités t des arcs d'origine s.
L'ensemble des successeurs de s est noté A(s) : $A(s) = \{t \in S : (s, t) \in A\}$;

Degré sortant de s, noté $d^+(s)$: nombre d'arcs d'origine s, i.e. nombre de successeurs de s donc $d^+(s) = |A(s)|$.

Prédécesseurs de s : origines t des arcs dont s est l'extrémité.
L'ensemble des prédécesseurs de s est noté $A^{-1}(s)$: $A^{-1}(s) = \{t \in S : (t, s) \in A\}$.

Degré entrant de s, noté $d^-(s)$: nombre d'arcs d'extrémité s, i.e. nombre de prédécesseurs de s donc : $d^-(s) = |A^{-1}(s)|$.

Un sommet s ∈ S est dit ***terminal*** s'il n'a pas de successeur, autrement dit si $A(s) = \emptyset$, ou encore si $d^+(s) = 0$.

Graphe orienté biparti ou bipartite (i.e. composé de 2 parties)

Graphe orienté biparti : triplet (G, S_1, S_2) où

- G = (S, A) est un graphe orienté ;
- S_1 et S_2 sont deux sous-ensembles de l'ensemble S des sommets, qui forment une partition de S (i.e. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S_1 \cup S_2 = S$) ;
- $A \subset (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$: tout arc ayant pour origine un sommet de S_1 a son extrémité dans S_2 et inversement.

Jeux à deux joueurs – Arène (notions illustrées sur un exemple p. 3)

Jeu à deux joueurs

On considère un jeu à deux joueurs J_1 et J_2 sur un graphe orienté fini $G = (S, A)$ où S est l'ensemble fini des sommets et A l'ensemble des arcs (ou arêtes).
*Les sommets de G représentent les **positions** ou situations possibles au cours du jeu.*
Chaque joueur possède son ensemble de sommets, respectivement S_1 et S_2 qui forment une partition de S : on dit que ***les sommets S_1 sont contrôlés par le joueur J_1***. De même pour S_2 et J_2. Le graphe est donc biparti.
*Les **arcs** de G sont les **coups** jouables ou **décisions** et représentent les règles du jeu.*

Graphe de jeu à deux joueurs ou Arène

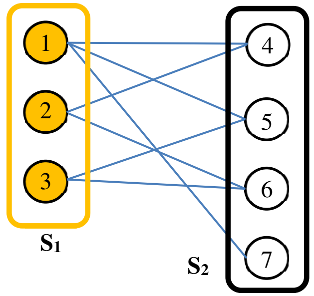
Graphe du jeu à deux joueurs ou ***arène*** : graphe orienté biparti $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ où $G = (S, A)$.
Exemple jeu de Chomp (2,3) page 3 : graphe avec sommets bleus et jaunes.

Hypothèses – Cadre de l'étude (notions illustrées sur un exemple p. 3)

On se restreint dans la suite aux jeux modélisés par des ***graphes orientés finis***.

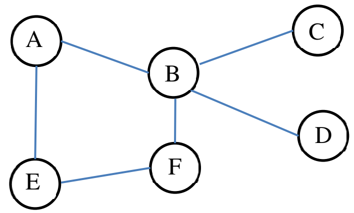
Dans un ***jeu d'accessibilité***, chaque joueur souhaite atteindre un ***sous-ensemble particulier de sommets*** (en vue de gagner !) en se déplaçant à tour de rôle sur le graphe.
Un jeu d'accessibilité à deux joueurs est représenté par un ***graphe biparti***.

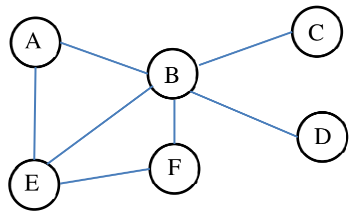
Dans un graphe G ***biparti***, l'ensemble de ses sommets S peut être divisé en deux sous-ensembles ***disjoints*** S_1 et S_2 tels que chaque arête de G a une extrémité dans S_1 et une extrémité dans S_2, il est donc possible de colorier les sommets du graphe avec 2 couleurs seulement (figure ci-contre).



Exemple 1 – Graphe biparti ou non

Les graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?

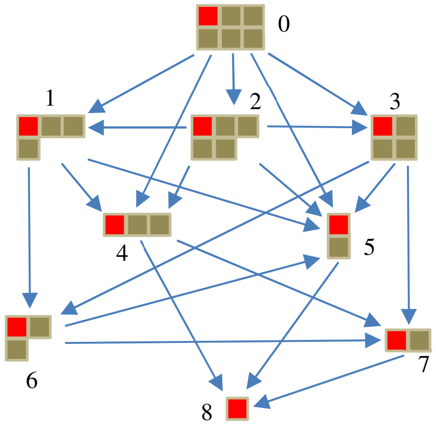




Exemple – Jeu de Chomp – Stratégie et positions gagnantes

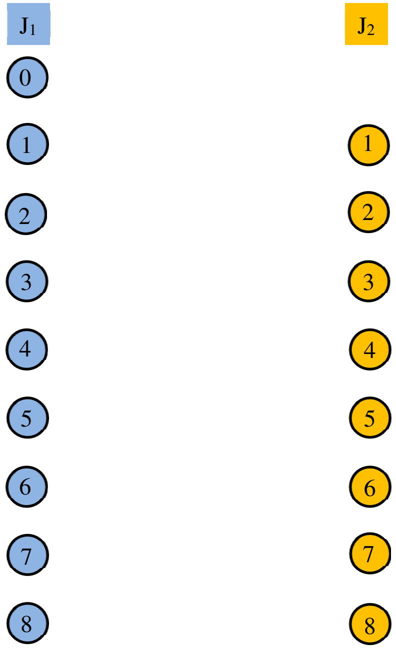
Il est possible d'associer un graphe orienté $G = (S, A)$ au jeu de Chomp.

Exemple de graphe associé à une partie de Chomp (2,3).



A partir de la position de départ (numéro 0), cinq positions sont envisageables (numéros 1 à 5). De proche en proche, on construit le graphe. A chaque état k est associé un ***sommet*** s_k du graphe ; $S = \{s_k\}$. A chaque coup/décision est associé un ***arc*** du graphe. L'état 1 est un ***successeur*** de l'état 0 ou de l'état 2 mais c'est le ***prédécesseur*** de l'état 4 ou de l'état 6. L'état 8 est ***terminal*** (il n'a pas de successeur). L'état 8 est également une ***position de victoire*** pour le joueur qui l'atteint.

En dédoublant chaque sommet et en l'indexant par le nom du joueur ou en associant une ***couleur*** pour les ***sommets contrôlés par un joueur***, il est possible de créer un ***graphe biparti*** appelé ***arène*** pour ce jeu (ci-contre).
Le joueur « bleu » J_1 commence (position 0 en bleu).
Sa décision l'amène nécessairement en 1, 2, 3, 4 ou 5.
Le joueur « jaune » J_2 joue à son tour.



Exercice 1 – Graphe biparti ou arène

a) Tracer ci-contre tous les arcs associés à une partie de Chomp (2,3).
b) Vérifier que si J_1 choisit la position 2 alors, quelle soit la décision de J_2, la partie est gagnée par J_1 : surligner en rouge les coups (arcs) que J_1 doit jouer après chaque coup joué par J_2 à partir de la position 2 puis à chaque coup de façon à gagner la partie.

Une telle succession de coups est appelée ***stratégie gagnante*** pour le joueur J_1.
On dit que la position 0 est une ***position gagnante*** pour le joueur J_1 : toute partie débutant à cette position peut être gagnée par J_1 en suivant une stratégie.
Selon cette définition, la position 3 est également une position gagnante.
Cependant, seule la stratégie débutant à la position 0 est appelée stratégie gagnante.

Parmi les positions gagnantes pour J_1, on distingue:
- les positions contrôlées par J_1 (positions gagnantes dans S_1, par exemple 0) ;
- les positions contrôlées par J_2 (positions gagnantes dans S_2, par exemple 6).

Exercice 2 – Stratégie gagnante pour J_2

Si J_1 ne choisit pas la position 2 au 1^er coup, existe-t-il une stratégie gagnante pour J_2 ?

Exercice 3 – Positions gagnantes pour J_1

Déterminer l'ensemble des positions gagnantes pour J_1 (i.e. contrôlées par J_1 ou par J_2).

Jeu d'accessibilité à deux joueurs (notions illustrées p. 3)

La question importante est : comment gagner ?! Quelques définitions sont nécessaires…

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu à deux joueurs avec $G = (S, A)$.

Partie π : chemin dans le graphe, i.e. suite finie ou infinie de positions $\pi = (s_0, s_1, \dots s_n, \dots)$ telle que $(s_i, s_{i+1}) \in A$.

Exemple 2 - Jeu de Chomp (2,3) – Donner un exemple de partie :

Jeu d'accessibilité (reachability game) : il existe deux sous-ensembles V_1 et V_2 (non vides et disjoints) de sommets ***terminaux*** (i.e. sans successeurs) de S_1 et S_2 tels que les parties finies gagnées par le joueur J_i sont les parties se terminant en une position de V_i.

Positions de victoire pour le joueur J_i : sommets de V_i.

Exemple 3 - Jeu de Chomp (2,3) – $V_1 =$, $V_2 =$

On peut représenter un jeu d'accessibilité par la structure $J = (G, S_1, S_2, V_1, V_2)$.
Les jeux de Chomp, Nim et bien d'autres tels que le morpion ou OXO, le puissance 4… sont des jeux d'accessibilité.

Stratégies et positions gagnantes

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu à deux joueurs avec $G = (S, A)$.

Stratégie positionnelle ou ***stratégie sans mémoire σ*** pour le joueur J_i : application σ qui à tout sommet non terminal $s \in S_i$ fait correspondre un successeur $\sigma(s) \in A(s)$.
Autrement dit, pour toute position s contrôlée par J_i et non terminale, $(s, \sigma(s))$ est un coup jouable pour J_i : à partir d'une position s, la position suivante est déterminée par la stratégie. Une stratégie est donc une succession de coups.

Soit $J = (G, S_1, S_2, V_1, V_2)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs.
Stratégie gagnante σ pour le joueur J_i : toute partie π finie conforme à σ est gagnée par J_i (la position terminale est dans V_i et aucune des positions précédentes n'appartient à $V_1 \cup V_2$).
Match nul :
- partie finie se terminant en $s \notin V_1 \cup V_2$;
- partie infinie dont aucune position n'est dans $V_1 \cup V_2$.

Position gagnante s pour le joueur J_i : il existe une stratégie gagnante pour J_i à partir de s.

Exercice 4 – Jeu de Chomp (2,3) – Positions gagnantes par analyse du graphe

Déterminer les positions gagnantes pour chaque joueur dans le graphe du jeu de Chomp (2,3).

Calcul des positions gagnantes - Attracteurs

La notion d'attracteur va permettre de déterminer les positions gagnantes pour un joueur et de construire ses stratégies gagnantes.

L'idée est simple : on recherche les positions qui ***permettent*** au joueur *j* d'atteindre la position de victoire à partir de ses prédécesseurs ou qui ***imposent*** à son adversaire de choisir une position gagnante pour le joueur *j*. Et on itère le procédé avec les prédécesseurs de ces positions.

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu où $G = (S, A)$ et soit $X \subset S$ un ensemble de sommets de G.
Étant donné un sommet $s \in S$, on rappelle que $A(s)$ désigne l'ensemble des successeurs de *s* dans le graphe G.
On considère l'ensemble suivant :

$$pred^1(X) = \{s \in S_1 : \exists t \in A(s) \quad t \in X\} \cup \{s \in S_2 : \forall t \in A(s) \quad t \in X\}$$

Autrement dit, $pred^1(X)$ est l'ensemble des positions *s* qui :
- *permettent* au joueur J_1 d'amener le jeu en une position *t* dans X (*il existe au moins* un arc (s, t) aboutissant dans X) ;
- *imposent* à l'adversaire J_2 d'amener le jeu en une position *t* dans X (*tous* les arcs (s, t) amènent dans X).

On définit de même $pred^2(X)$.

En réitérant cette construction (i.e. en cherchant $pred^1(pred^1(X))$, les prédécesseurs des prédécesseurs de X et ainsi de suite), on obtient l'ensemble de tous les sommets à partir desquels le joueur a une stratégie lui permettant d'amener le jeu en X en un nombre fini de coups. Particulièrement intéressant pour $X = V_i$!

On construit l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur J_i par récurrence à l'aide d'une suite de sous-ensembles A^i de S de la façon suivante.

Attracteur d'un ensemble X de sommets

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu où $G = (S, A)$ et soit $X \subset S$ un ensemble de sommets de G.
On définit par récurrence :

$$A_0^i(X) = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ A_{n+1}^i(X) = A_n^i(X) \cup pred^i\left(A_n^i(X)\right)$$

et on pose $A^i(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^i(X)$

Bassin d'attraction ou ***attracteur*** de X pour le joueur J_i : ensemble $A^i(X)$.

Attracteurs et positions gagnantes dans un jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2, V_1, V_2)$ un jeu d'accessibilité ; on suppose que tout sommet *s* de G n'a qu'un nombre fini de successeurs.
L'ensemble des positions gagnantes pour le joueur J_1 est l'attracteur de l'ensemble V_1 de ses positions de victoire, $A^1(V_1)$.

Exercice 5 – Jeu de Chomp (2,3) – Positions gagnantes : attracteur $A^1(V_1)$

Ecrire la suite des A_i^1 pour J_1 et préciser le nombre de coups joués par J_1 pour atteindre la cible à partir de chacun des A_i^1.

Conclusion

Ces résultats permettent d'élaborer des algorithmes généraux, applicables à différents jeux, pour la recherche des positions gagnantes et donc des stratégies gagnantes mais on conçoit facilement que dans le cas de jeux réels comportant un très grand nombre de sommets et de coups jouables un tel algorithme récursif puisse ne pas aboutir (problèmes de complexité spatiale et temporelle).
Une heuristique doit alors être utilisée, il s'agit de l'algorithme min-max.

Complément à titre d'information

Rang d'un sommet s

Le rang d'un sommet est le nombre de coups à jouer pour gagner à partir de ce sommet.
Pour tout sommet $s \in A^i(X)$ on définit le rang de *s* (par rapport à X et au joueur J_i) par :

$$rg^i(s, X) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : s \in A_n^i(X)\right\}$$

Pour tout sommet $s \in S \backslash A^i(X)$ on pose : $rg^i(s, X) = \infty$.

Stratégies gagnantes dans un jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2, V_1, V_2)$ un jeu d'accessibilité ; on suppose que tout sommet *s* de G n'a qu'un nombre fini de successeurs.

Une stratégie positionnelle σ pour le joueur J_1 telle que :
- pour tout sommet non terminal $s \in S_1 \cap A^1(V_1)$, $rg^1(\sigma(s), V_1) < rg^1(s, V_1)$
- pour tout sommet non terminal $s \in S_1 \backslash A^2(V_2)$, $\sigma(s) \notin A^2(V_2)$

existe et est gagnante depuis toutes les positions de $A^1(V_1)$ et est non perdante depuis toutes les positions de $S_1 \setminus A^2(V_2)$ (i.e. toute partie conforme à σ est soit gagnante soit un match nul).

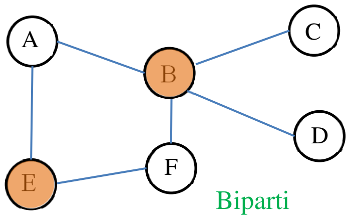
$rg^1(s, V_1)$ est le nombre minimal de coups nécessaires pour que le joueur J_1 gagne le jeu à partir du sommet $s \in A^1(V_1)$ quelle que soit la stratégie de l'adversaire.

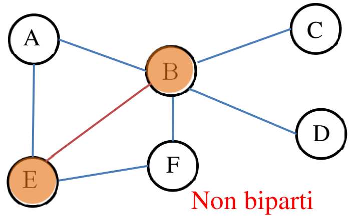
Un notebook « Théorie des jeux – Attracteurs » permettant de jouer au jeu de Nim contre un programme est disponible, l'implémentation des algorithmes ci-dessus est fournie.

Réponses

Exemple 1 – Graphe biparti ou non

Les graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?

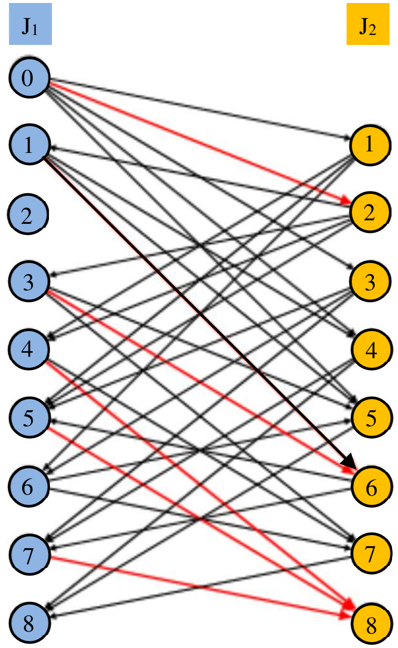




Exercice 1 – Graphe biparti ou arène

a) Tracer ci-contre tous les arcs associés à une partie de Chomp (2,3).

b) Vérifier que si J_1 choisit la position 2 alors, quelle soit la décision de J_2, la partie est gagnée par J_1 : surligner en rouge les coups (arcs) que J_1 doit jouer après chaque coup joué par J_2 à partir de la position 2 puis à chaque coup de façon à gagner la partie.



Exercice 2 – Stratégie gagnante pour J_2

Si J_1 ne choisit pas la position 2 au 1er coup, existe-t-il une stratégie gagnante pour J_2 ?

La stratégie gagnante pour J_2 est détaillée ci-dessous dès que J_1 ne joue pas la position 2

J_1 ne peut atteindre que 1 3 4 5 s'il ne choisit pas 2

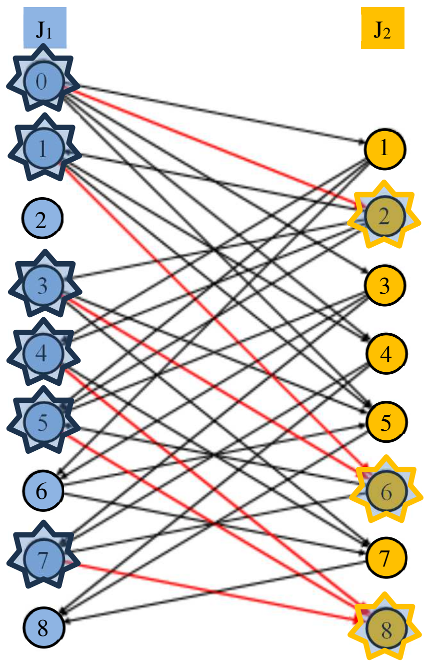
- si J_1 choisit 4 ou 5 alors J_2 joue 8 et gagne en 1 coup.

- si J_1 choisit 1 ou 3 alors J_2 joue 6 ;

J_1 ne peut alors jouer que 5 ou 7 , J_2 joue alors 8 et gagne en 2 coups.

Exercice 3 – Positions gagnantes pour J_1

Déterminer l'ensemble des positions gagnantes pour J_1 (i.e. contrôlées par J_1 ou par J_2).



Positions gagnantes pour J_1 :

- contrôlées par J_1 = 0, 1, 3, 4, 5, 7

- contrôlées par J_2 = 2, 6, 8

8 est une position de victoire pour J_1.

Exemple 2 - Jeu de Chomp (2,3)

Donner un exemple de partie : (0, 2, 5, 8)

Exemple 3 - Jeu de Chomp (2,3)

$V_1 = \{ 8 \}$, $V_2 = \{ 8 \}$

Exercice 4 – Jeu de Chomp (2,3) – Positions gagnantes par analyse du graphe

Déterminer les positions gagnantes pour chaque joueur dans le graphe du jeu de Chomp (2,3).
Positions gagnantes pour J_1 : cf. exercice 3.
Positions gagnantes pour J_2 :

- contrôlées par J_1 : { 6 , 8 }

- contrôlées par J_2 : { 1 , 3 , 4 , 5 , 7 }

(cf. exercice 2 : après 1 ou 3 J_2 joue 6 qui oblige J_1 à jouer 5 ou 7 et J_2 joue alors 8)

Exercice 5 – Jeu de Chomp (2,3) – Positions gagnantes : attracteur A^1 (V_1)

Ecrire la suite des A_i^1 pour J_1 et préciser le nombre de coups joués par J_1 pour atteindre la cible à partir de chacun des A_i^1.

A_0^1 (V_1) = V_1 = {8} : cible à atteindre

$A_1^1 = A_0^1 \cup \text{pred}^1(A_0^1 (V_1))$ = {8}{4, 5, 7} = {8, 4, 5, 7}

La cible est atteinte en 1 coup par J_1 via les arcs : (4,8), (5,8), (7,8).

$A_2^1 = A_1^1 \cup \text{pred}^1(A_1^1 (V_1))$ = {8, 4, 5, 7}∪{6} = {8, 4, 5, 7, 6}

La cible atteinte en 2 coups par J_1 : J_2 ne peut jouer que (6,5) ou (6,7) mais 5 et 7 $\in A_1$.

$A_3^1 = A_2^1 \cup \text{pred}^1(A_2^1 (V_1))$ = {8, 4, 5, 7, 6}∪ {3, 1} = {8, 4, 5, 7, 6, 3, 1} 3 coups

$A_4^1 = A_3^1 \cup \text{pred}^1(A_3^1 (V_1))$ = {8, 4, 5, 7, 6, 3, 1}∪{2} = {8, 4, 5, 7, 6, 3, 1, 2} 4 coups

$A_5^1 = A_4^1 \cup \text{pred}^1(A_4^1 (V_1))$ = {8, 4, 5, 7, 6, 3, 1, 2}∪{0} = {8, 4, 5, 7, 6, 3, 1, 2, 0} 5 coups

<u>Remarque</u> : à partir de A_k , le joueur J_1 gagne la partie en k coups au maximum.