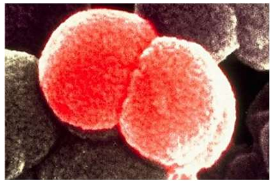
Taille critique d'une bactérie

Données biologiques.



Pour vivre, une bactérie a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau au voisinage de sa surface.

On admet que la consommation en dioxygène de la bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit le taux horaire de consommation de dioxygène par unité de masse (de la bactérie), noté $\mathcal{A}$ et mesuré en mol kg^{-1} s^{-1}.

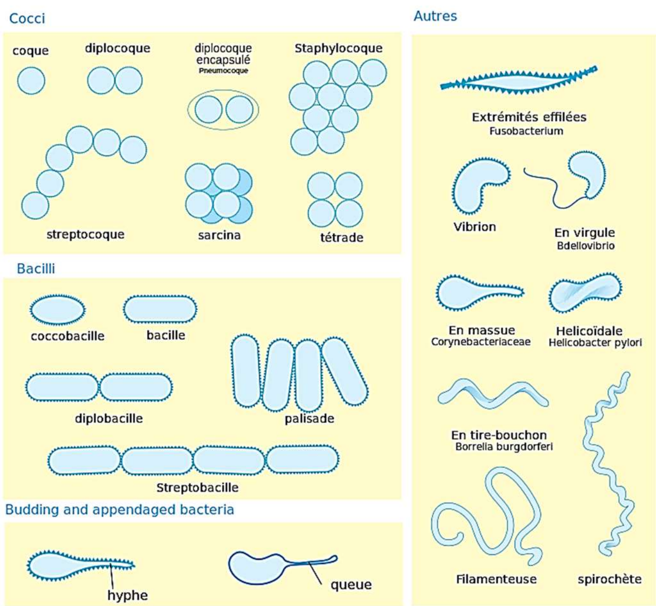
Compréhension du problème.

L'arrivée du dioxygène s'effectue à la ***surface*** de la bactérie tandis que le métabolisme qui entraîne la consommation $\mathcal{A}$ est proportionnel à la masse et donc au ***volume*** de la bactérie.

> ***Question*** : comment la taille de la bactérie est-elle liée à cette ***compétition*** entre effets de *surface* et effets de *volume* ?

Ce problème est général en biologie, on retrouve une problématique analogue concernant ***l'équilibre thermique*** des animaux.

La réponse à cette question nécessite de ***modéliser*** le problème.



https://fr.wikipedia.org/wiki/Bact%C3%A9rie

La bactérie est modélisée par une sphère fixe de rayon R. Sa masse volumique μ est assimilée à celle de l'eau.

Le régime est supposé stationnaire et on note $n(r)$ la densité de dioxygène dissous à la distance r du centre de la bactérie. La diffusion du dioxygène obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

A grande distance de la bactérie, la densité de dioxygène dissous est notée n_0 et est supposée constante.

1. Diffusion du dioxygène autour de la bactérie
   - 1.1. Préciser et indiquer sur un schéma représentant la bactérie dans son milieu, les zones les plus riches en dioxygène dissous et les régions les plus pauvres.
     En déduire la direction du courant (densité de flux) $\vec{j}$ de dioxygène dissous.
   - 1.2. En tenant compte des symétries du problème, exprimer $\vec{j}(r)$ le vecteur densité de flux de particules diffusées en fonction de D et $n(r)$.
   - 1.3. A l'aide d'un bilan de matière pour un système à préciser, montrer que le flux de dioxygène dissous à travers une sphère de rayon $r > R$ est indépendant de r : $\phi(r) = \phi = \text{cte}$ (faire un schéma avec $\vec{j}$ et le vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$ en tenant compte de la convention thermodynamique ; attention aux signes !).
   - 1.4. Exprimer le nombre $\phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant par unité de temps dans une sphère de rayon $r > R$ en fonction de $j(r)$.
   - 1.5. Déterminer l'expression de n_S , densité particulaire en dioxygène dissous sur la surface extérieure de la bactérie. On exprimera le résultat en fonction de ϕ, D, R et n_0.
2. Taille critique de la bactérie
   - 2.1. Exprimer ϕ en fonction de R, $\mathcal{N}_A$, μ et $\mathcal{A}$.
   - 2.2. En déduire l'expression de n_S. Quelle inégalité doit être vérifiée afin que la bactérie ne suffoque pas ? En déduire l'expression du rayon critique d'une bactérie aérobie.