Ondes – Dispersion - Absorption

Phénomènes de dispersion et d'absorption

L'équation de d'Alembert ne décrit pas tous les phénomènes ondulatoires, d'autres termes peuvent apparaître dans les équations d'onde, dus par exemple (mais pas seulement) aux phénomènes dissipatifs.

Autres équations : relation de dispersion – vitesse de phase

Pour une équation d'onde ***linéaire*** à ***coefficients constants***, l'analyse de Fourier autorise à chercher des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques en utilisant la notation complexe :

$s(x,t) = \Re e\left(\underline{s}(x,t)\right)$ avec $\underline{s}(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ où ω est réel et $\underline{k}$ est a priori ***complexe***.

Pour de telles ondes (parfois appelées pseudo-OPPH), la ***relation de dispersion*** (relation entre k et ω) est complexe : $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + j\,k''(\omega)$.

Conséquence :

L'onde réelle est alors de la forme : $s(x, t) = Ae^{k''x}\cos(\omega t - k'x + \varphi)$.

Interprétation :

- Le terme $e^{k''x}$ traduit une ***absorption*** par le milieu de propagation (si k'' négatif).
- Le terme sinusoïdal $\cos(\omega t - k'x + \varphi)$ traduit une ***onde progressive*** dont la ***vitesse de phase*** est $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k'(\omega)}$.

  En général, ***la vitesse de phase dépend de*** ω, on dit que le milieu est ***dispersif*** : ***toutes les ondes sinusoïdales ne se propagent pas à la même vitesse***.
  Ceci a des conséquences sur la propagation de signaux quelconques (ci-dessous).

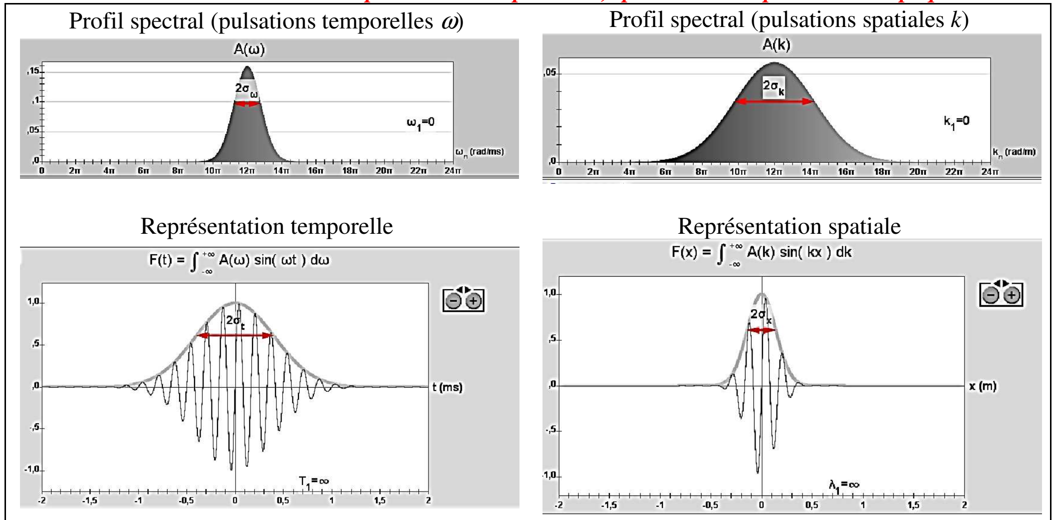
Paquet d'ondes – Vitesse de groupe

Le modèle des ondes planes progressives harmoniques (illimitées dans l'espace et dans le temps) n'est pas réaliste : une onde est émise pendant une **durée limitée** dans une **région limitée** de l'espace. Un ***paquet d'ondes*** constitué d'une superposition de telles ondes permet de mieux représenter les ondes réelles.

Paquet d'onde

Plus précisément, **un paquet d'ondes est une superposition d'ondes monochromatiques de pulsations ω voisines d'une pulsation moyenne ω_0 et dont l'extension temporelle est limitée.**
Le profil spectral (Gaussien, Lorentzien, carré…) d'un signal est la courbe donnant l'amplitude de chaque onde en fonction de sa fréquence.

Représentations spectrales, spatiales et temporelles d'un paquet d'ondes



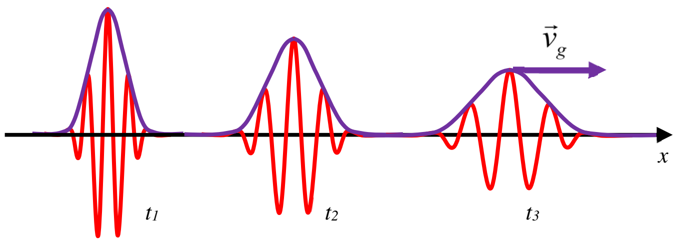
$\Delta\omega\,\Delta t \approx 1$ $\Delta k\,\Delta x \approx 1$

[Faire des vagues (Applet Phet)]

Largeur du paquet d'ondes et largeur spectrale

Relations fondamentales de Fourier : $\Delta\omega\,\Delta t \approx 1$ et $\Delta k\,\Delta x \approx 1$.
Plus le paquet d'ondes est étroit plus son spectre est large et réciproquement.
Une OPPH monochromatique (spectre constitué par une *raie unique*) correspond à une onde d'*extension infinie dans le temps et dans l'espace*.

Exemple de propagation de paquet d'onde :



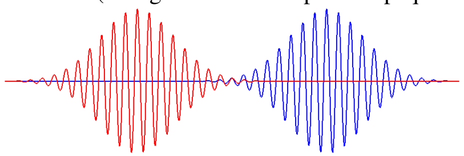
Vitesse de groupe

La vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes est la vitesse de groupe notée v_g.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

Milieu non dispersif

Dans un milieu ***non dispersif et non absorbant***, toutes les ondes sinusoïdales se propagent à la même vitesse ($v_\varphi = c \quad \forall \omega$) : ***le paquet d'onde se propage sans déformation dans l'espace et dans le temps à la même vitesse c*** (cf. figure ci-dessous pour un paquet d'ondes Gaussien) :



La ***vitesse de groupe v_g*** (vitesse de déplacement de l'enveloppe du paquet) est égale à la ***vitesse de phase v_φ*** (vitesse commune des ondes sinusoïdales qui composent le paquet).

Milieu faiblement dispersif

Expression de la vitesse de groupe

Dans un milieu ***faiblement dispersif et non absorbant***, l'onde est de la forme :

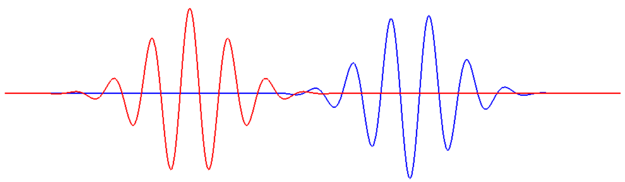
$$\underline{s}(x,t) = E(t - x/v_g)\, e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

Où :

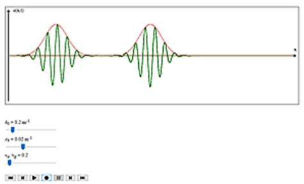
- $E(t - x/v_g)$ est une ***onde enveloppe*** se propageant à la vitesse $v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0}$ appelée ***vitesse de groupe***.
- $e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$ est une ***onde moyenne*** se propageant à la ***vitesse de phase*** $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$.

Dans un tel milieu, les ondes se propagent à des vitesses différentes : ***le paquet d'ondes*** (l'onde résultante) ***se propage en se déformant*** (observer les paquets au voisinage de leur maximum) mais ni l'enveloppe ni l'onde moyenne ne se déforment : l'onde moyenne se propage plus vite ou moins vite que l'enveloppe.

Exemple :



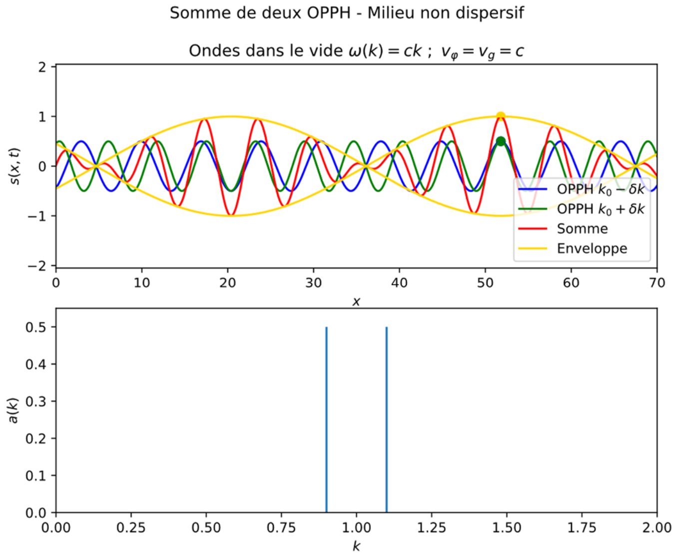
Applet

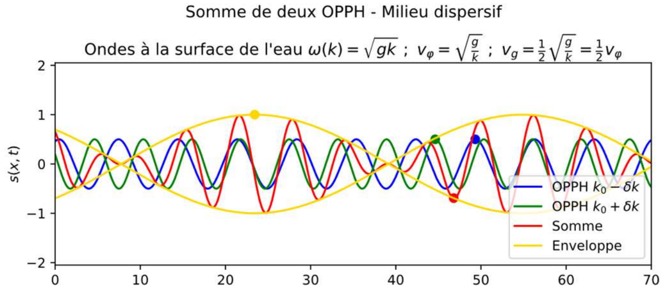


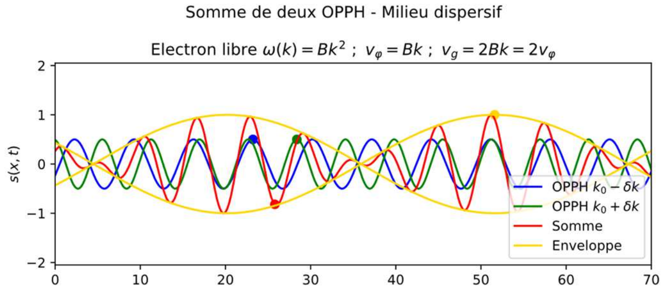
Milieu fortement dispersif

Dans un milieu ***fortement dispersif et non absorbant***, la forme de l'enveloppe est altérée au cours de la propagation : ***le paquet d'ondes s'élargit*** (ce qui limite le débit d'information : il faut éviter que deux paquets ne se recouvrent) et ***s'atténue*** *même en l'absence d'absorption*.

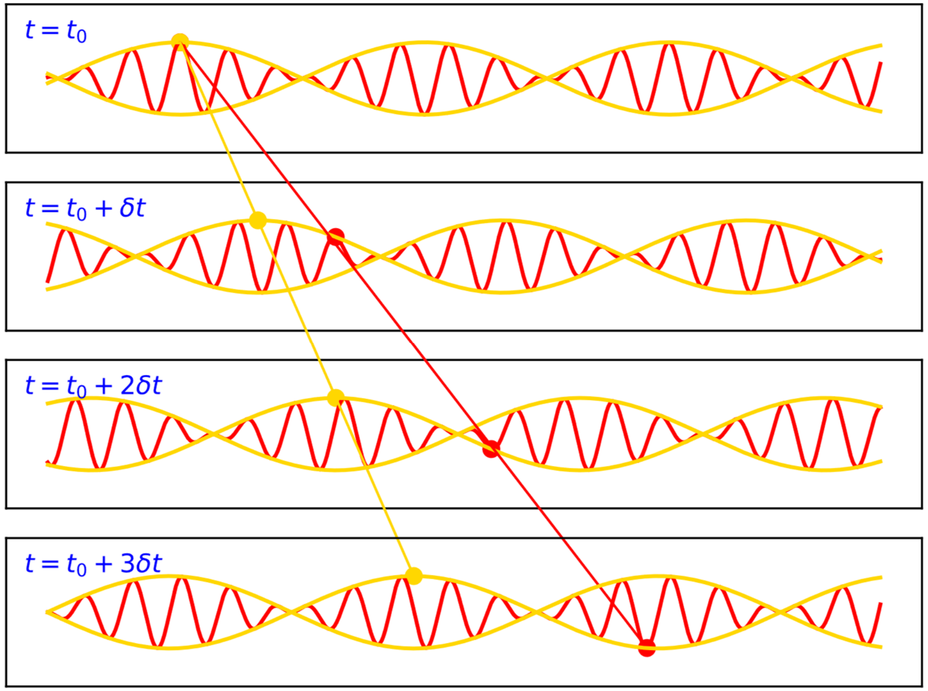
Exemple 1 – « Paquet d'ondes » résultant de la somme de 2 ondes d'amplitudes égales





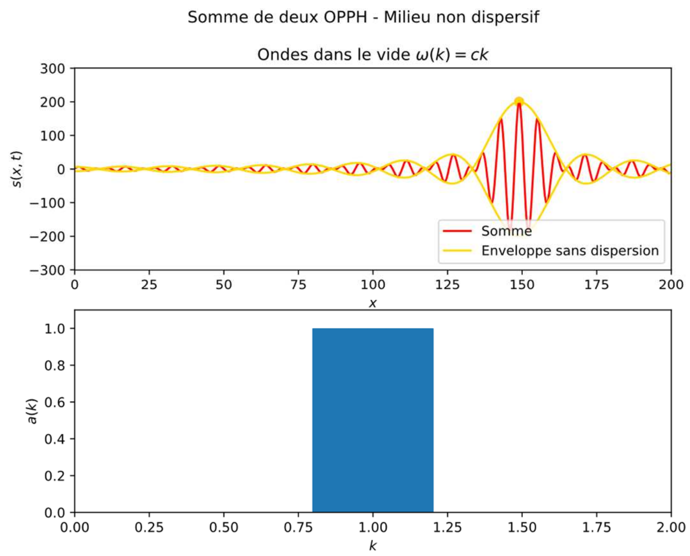


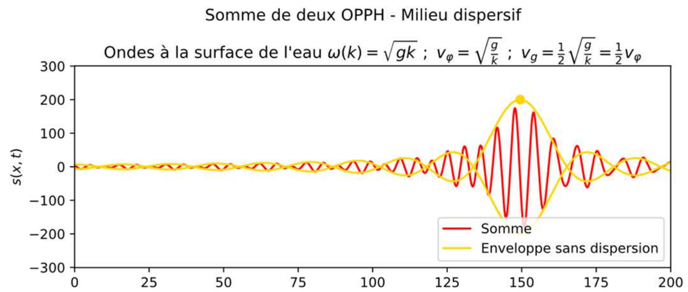
« Paquet » d'onde résultant de la somme de deux ondes à la surface de l'eau à différents instants

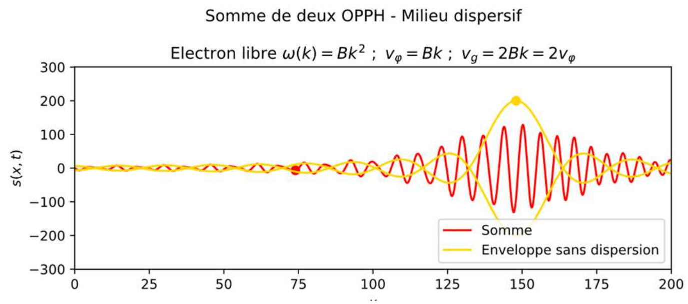


Exemple 2 – « Paquet d'ondes » résultant de la somme de N ondes d'amplitudes égales
Etalement et déformation du paquet d'onde

(N = 200 sur les simulations ci-dessous)



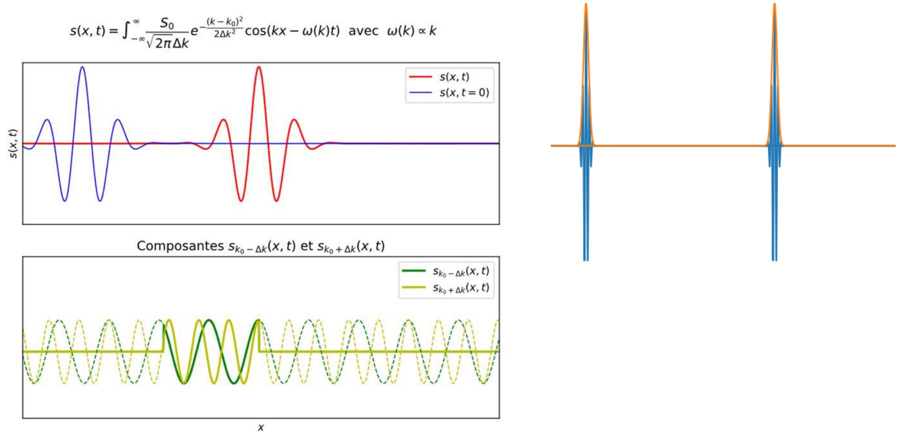


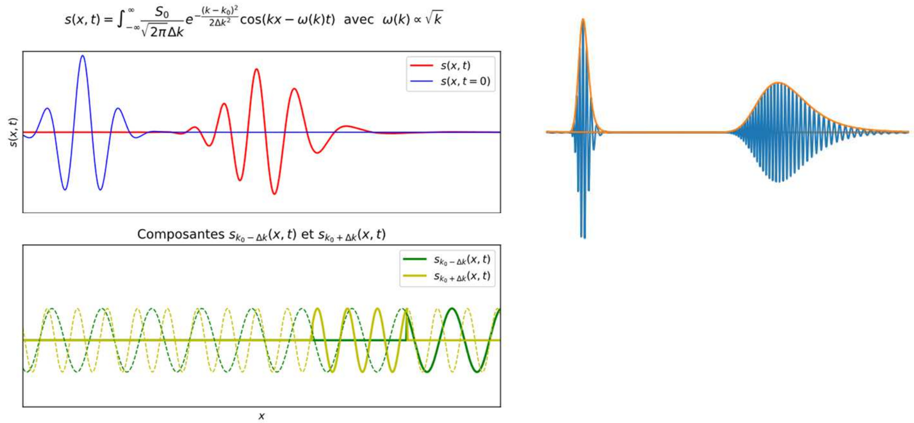


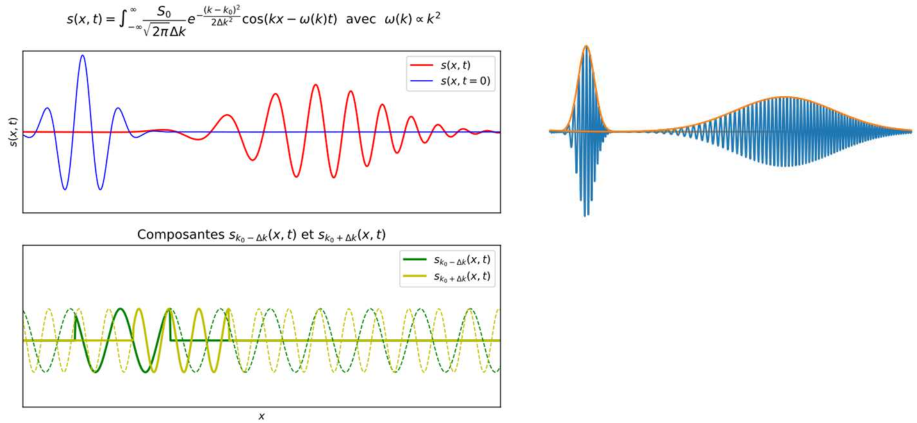
Exemple 3 – Paquet d'ondes résultant de la somme d'un continuum d'ondes

Paquet Gaussien

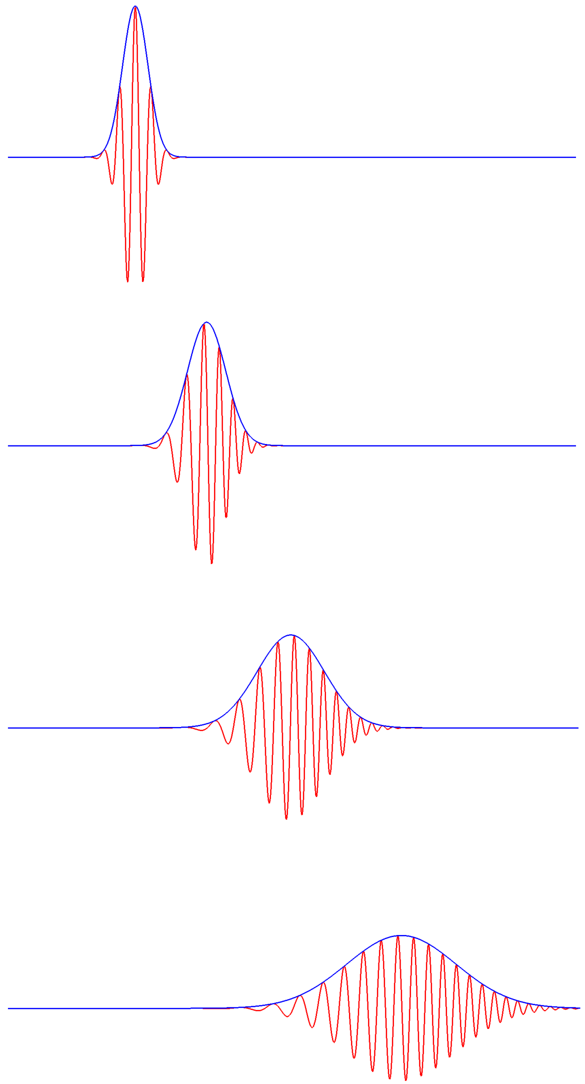
(Domaine d'intégration limité à $k_0 \pm \frac{3}{4}k_0$ et 120 points méthode de Simpson à gauche – FFT à droite)







Evolution au cours du temps



Applets : cf. Capacités numériques « Paquet d'ondes »