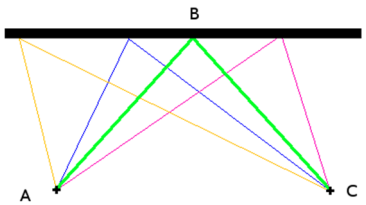
Programmation dynamique

Les problèmes d'optimisation

Quel est le plus court chemin (i.e. le plus rapide en physique) pour aller de A à B en rebondissant sur le mur ?



Réponse : il faut que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion (loi de la réflexion de Snell-Descartes).

Cette question est un ***problème d'optimisation*** du temps de parcours (la loi de la réfraction est également un problème d'optimisation du temps de parcours).

L'optimisation est une branche des mathématiques concernant les problèmes qui consistent à ***minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble***.

Les premiers problèmes d'optimisation auraient été formulés par Euclide, au III^{e} siècle avant notre ère, dans son ouvrage historique *Éléments*.

Il existe plusieurs stratégies, chacune présentant des avantages et des inconvénients, pour tenter de résoudre les ***problèmes d'optimisation*** :

- ✓ les ***algorithmes gloutons*** (pcsi) ;
- ✓ la ***programmation dynamique*** (pc) ;
- ✓ … (domaine très vaste)

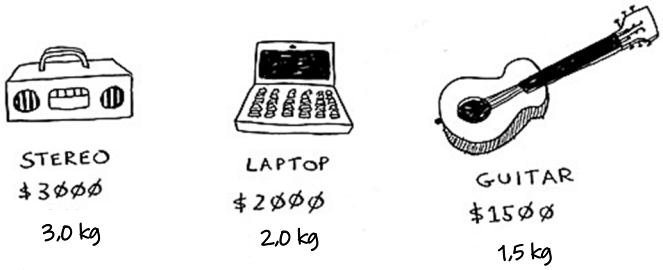
The knapsack problem

D'après grokking algorithms Aditya Y. Bhargava. Ed. Manning

Le problème du sac à dos - Stratégie gloutonne

Suppose you're a greedy thief. You're in a store with a knapsack, and there are all these items you can steal.
But you can only take what you can fit in tour knapsack. The knapsack can hold 3,5 kg.

You're trying to maximize the value of the items you put in your knapsack.
What algorithm do you use?



The greedy strategy is pretty simple:

1. Pick the most expensive thing that will fit in your knapsack.
2. Pick the next most expensive thing that will fit in your knapsack. And so on.

Exercice 1 :

L'algorithme glouton donne-t-il la solution optimale ?

Conclusion

La stratégie gloutonne ne fournit pas toujours la solution optimale mais elle peut fournir une solution proche de la solution optimale dont on peut parfois se contenter parce que c'est un algorithme simple et rapide.
La solution optimale est fournie par la programmation dynamique.

Un ***algorithme glouton*** (ou gourmand ou goulu) est un algorithme qui suit le principe de réaliser, ***étape par étape, un choix optimum local, afin d'obtenir un résultat optimum global***.

Dans les cas où l'algorithme ne fournit pas systématiquement la solution optimale, il est appelé une ***heuristique*** gloutonne.

Par exemple, dans le problème du rendu de monnaie (donner une somme avec le moins possible de pièces, *problème d'optimisation*), l'algorithme consistant à répéter le choix de la pièce de plus grande valeur (*optimum local*) qui ne dépasse pas la somme restante est un algorithme glouton.
Suivant le système de pièces, l'algorithme glouton est optimal ou pas (cf. exercice 2-1).

***Exercice* 2-1** - Rendu de monnaie

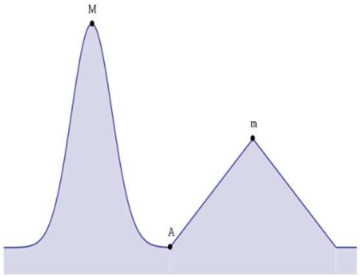
1. Dans le système de pièces européen (en centimes : 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200), quelle somme l'algorithme glouton donne-t-il pour 37 centimes ? (i.e. quelles pièces choisir pour former cette somme ?)

   Dans ce système de pièces, on peut montrer que l'algorithme glouton donne toujours une solution optimale.
2. Justifier que, dans le système de pièces (1, 3, 4), l'algorithme glouton n'est pas optimal pour 6 centimes.

***Exercice* 2-2** – Recherche de maximum

En partant du point A (figure ci-contre) et en cherchant à monter selon la plus forte pente (*optimum local*), quel maximum un algorithme glouton trouvera-t-il ?

Cet exemple montre également un cas où le choix optimum local ne conduit pas au résultat optimum global.



Une ***heuristique*** est une méthode de calcul qui fournit rapidement une solution réalisable, pas nécessairement optimale ou exacte, pour un problème d'optimisation difficile.
Heuristique vient du grec trouver, trouver par hasard, découvrir, imaginer qui a donné eurêka : j'ai trouvé !

Une heuristique s'impose quand les algorithmes de résolution exacte sont impraticables, à savoir de complexité polynomiale de haut degré, exponentielle ou plus.

The knapsack problem

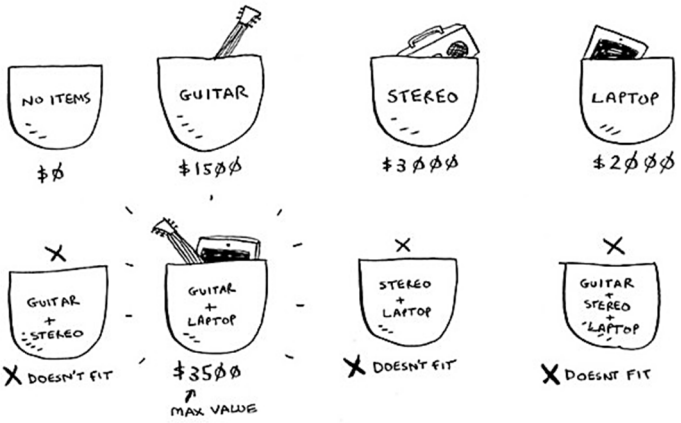
D'après grokking algorithms Aditya Y. Bhargava. Ed. Manning

Le problème du sac à dos – Introduction à la programmation dynamique

You are a thief with a knapsack that can carry 4 lb of goods.
You have three items that you can put into the knapsack.

What items should you steal so that you steal the maximum money's worth of goods?

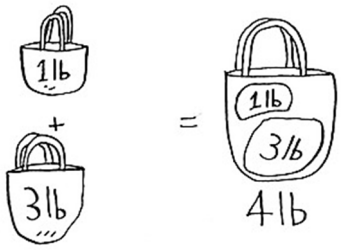
The simplest algorithm is this: you try every possible set of goods and find the set that gives you the most value.



Cette stratégie, dite de ***force brute***, fonctionne mais elle est lente.
Pour seulement 3 objets, il faut envisager 8 configurations possibles. Pour 4 objets, le nombre de configurations est 16.
Le nombre de configurations double si on ajoute un objet, la complexité est $O(2^n)$ avec n objets.

⇒ **La programmation dynamique va permettre de résoudre le problème plus rapidement.**

La stratégie dynamique consiste à résoudre des sous-problèmes de taille croissante jusqu'à résoudre le problème global.



Avant de chercher la solution optimale pour un sac de 4 lbs, on cherche les solutions optimales pour des sous-problèmes, c'est-à-dire pour les sacs de 1 lb et 3lbs :

- ✓ soit la réunion de ses deux « sous-sacs » constitue la solution optimale ;
- ✓ soit il existe un objet de 4 lbs de valeur plus grande.

Dans les deux cas de figure, on dispose de la solution optimale.

Un tableau permet d'illustrer un algorithme de programmation dynamique.

Colonnes = poids du sac à dos de 1 à 4 lbs

Poids max du sac 4 lbs

Une ligne par objet à choisir parmi

	1 lb	2 lbs	3 lbs	4 lbs
Guitar 1 lb $ 1500	G $1500			
Stereo 4 lbs $ 3000				
Laptop 3 lbs $ 2000				

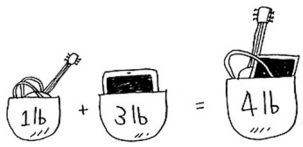
***Exercice* 3-1** :

Remplir les 3 premières lignes du tableau pas à pas : ligne par ligne et de gauche à droite, sur le modèle de la première cellule, en gardant à l'esprit qu'à chaque ligne, on peut voler l'objet de cette ligne ou/et un objet des lignes précédentes ; explications ci-dessous :

- ✓ Ligne de la guitare
  Pour chaque cellule de la ligne, la seule question à se poser est : est-ce que je vole la guitare ou pas ? Dans cette ligne, il n'y a rien d'autre à voler…
- ✓ Ligne de la chaîne stéréo
  Pour les cellules de cette ligne, il est possible de voler la guitare **ou/et** la chaîne (en respectant la contrainte sur le poids total).
- ✓ Ligne de l'ordinateur portable
  Il est possible de voler une combinaison quelconque d'objets qui respecte la contrainte sur la masse totale, la dernière cellule donne la réponse.

Dans tous les cas (sauf la dernière cellule), soit on reprend le meilleur résultat précédent (flèches vertes) soit on choisir le nouvel objet (texte en bleu).

Le raisonnement utilisé pour compléter la dernière cellule est différent : la solution pour un sac de 4 livres = 1 + 3 livres combine ***le meilleur choix pour un sac de 1 livre*** (la guitare) et ***le meilleur choix pour un sac de 3 livres*** (l'ordinateur).



En résumé, la décision de prendre ou de laisser l'objet en cours d'évaluation repose sur plusieurs comparaisons.

- Si l'objet est trop lourd pour la capacité du sac, on conserve le choix précédent dans cette colonne (une ligne au-dessus, flèche verte) qui représente le meilleur choix à ce stade.
- Si la masse *w* de l'objet est compatible avec la masse maximale autorisée *W* pour le sac, plusieurs cas se présentent :
  - l'objet maximise la valeur du sac à lui seul (sans ajouter un autre objet), on le choisit (décision en bleu) ;
  - la masse disponible dans le sac (*W*-*w*) permet d'ajouter *la solution optimale pour le sac de masse W-w*, on choisit alors l'objet et le contenu de ce sac.
  - Aucune des deux possibilités précédentes n'est meilleure que le *précédent choix optimal pour un sac de masse W*, on conserve alors le choix précédent (case juste au-dessus).

Propriété de sous-structure optimale

La décision de prendre ou non l'objet de masse w pour optimiser un sac de masse W repose sur l'optimisation :

- ✓ du sac de masse *W* sans cet objet ;
- ✓ du sac de masse (*W*-*w*) sans cet objet (qui va donc pouvoir être ajouté s'il maximise la valeur du obtenue).

On comprend donc que la solution optimale à une étape donnée ***nécessite la connaissance des solutions optimales obtenues pour les sous-problèmes précédents*** : on dit que le problème présente la ***propriété de sous-structure optimale***.

En réalité, il existe une formule qui permet de remplir toutes les cases, *ligne par ligne*, à condition d'ajouter une première ligne et une première colonne remplies de 0 (cf. tableau ci-dessous).
Notons :

- ligne ***i*+1** : évaluation de l'objet de valeur v_i en $ et de masse w_i en lbs à choisir ou non ;
- colonne ***j*** : la capacité maximale du sac dans cette colonne est j lbs ;
- $v_{max}[i][j]$ la valeur optimale calculée pour la cellule ligne i colonne j.

$$v_{max}[i+1][j] = \begin{cases} \max\left(\overset{v_{max} \text{ pour objets précédents}}{v_{max}[i][j]} \;,\; v_i + \overset{v_{max} \text{ pour le poids disponible restant}}{v_{max}[i][j-w_i]} \right) & \text{si } w_i \le j \\ v_{max}[i][j] & \text{si } w_i > j \end{cases}$$

***Exercice* 3-2** :

Vérifier cet algorithme (remplir le tableau ligne par ligne de gauche à droite).

Objet	Valeur/poids
Guitar	v_0 = $ 1500 w_0 = 1 lb
Stereo	v_1 = $ 3000 w_1 = 4 lbs
Laptop	v_2 = $ 2000 w_2 = 3 lbs

		j - Capacité maximale = *j* lbs				
		0 lb	1 lb	2 lbs	3 lbs	4 lbs
i	0	0	0	0	0	0
	1	0	G $1500			
	2	0				
	3	0				
	4	0				

***Exercice* 4** :

Que se passe-t-il si on ajoute un objet (iphone 1lb $2000) ?
Remplir la dernière ligne du tableau ci-dessus.

***Exercice* 5** :

Vérifier que modifier l'ordre des choix (l'inversion de deux lignes) ne modifie pas le résultat final.

Chevauchement de sous-problèmes

On constate sur l'algorithme de cet exemple que la solution pour la cellule $[i+1][j]$ nécessite de connaître la solution pour les cellules au-dessus ou/et à gauche dans le tableau : $[i][j]$ et $[i][j-w]$ (w étant ici le poids de l'objet en cours d'évaluation exprimé en livres).
Mais le calcul pour la cellule $[i][j]$ a elle aussi nécessité le calcul de la cellule $[i][j-w]$: on dit que ***les sous-problèmes se chevauchent***.
Le même problème est résolu plusieurs fois (problème de temps d'exécution, c'est à dire de ***complexité temporelle***) sauf si on stocke les résultats précédents comme dans le tableau utilisé (problème de taille mémoire, c'est-à-dire de ***complexité spatiale***).

Le ***tableau*** construit permet de mettre à jour un ***graphe de dépendance*** permettant d'identifier les sous-problèmes liés entre eux.
Cette situation a été rencontrée en première année dans le calcul des termes de la suite de Fibonacci (cf. ci-dessous, page 4).

Programmation dynamique

En informatique, la ***programmation dynamique*** est une méthode algorithmique pour résoudre des ***problèmes d'optimisation***.
La programmation dynamique consiste à résoudre un problème en le ***décomposant en sous-problèmes***, puis à résoudre les sous-problèmes, ***des plus petits aux plus grands en stockant les résultats intermédiaires***.
La programmation dynamique se caractérise par la résolution, par taille croissante, de *tous* les sous-problèmes locaux alors que la programmation gloutonne effectue *un* choix local.

Le concept a été introduit au début des années 1950 par Richard Bellman. À l'époque, le terme « programmation » signifie *planification* et *ordonnancement*.

Elle a d'emblée connu un grand succès, car de nombreuses fonctions économiques de l'industrie étaient de ce type, comme la conduite et l'optimisation de procédés chimiques, ou la gestion de stocks.

Le stockage des solutions optimales pour les sous-problèmes transforme un problème de ***complexité temporelle*** (en évitant de recalculer certains sous-problèmes) en problème de ***complexité spatiale*** (le stockage des solutions nécessite de la mémoire).

Solution optimale

Cette méthode garantit d'obtenir la ***solution optimale*** mais sa complexité temporelle est parfois trop importante pour pouvoir être utilisée en pratique. Dans ce cas, on se résout à utiliser la programmation gloutonne.

Exemple : la méthode utilisée dans l'exercice 3 permet de trouver la solution optimale.

Sous-structure optimale

On dit qu'un problème possède la propriété de ***sous-structure optimale*** si une solution optimale peut être trouvée en le découpant en sous-problèmes dont on obtient *récursivement* les solutions optimales.
On parle du ***principe d'optimalité de Bellman***.

Exemple : algorithme précédent (cf. explications sur la détermination de la valeur optimale dans la dernière case du tableau).

Chevauchement des sous-problèmes

On dit que ***les sous-problèmes se chevauchent*** si, au cours de l'algorithme, certains sous-problèmes ne sont pas indépendants et doivent être résolus plusieurs fois (la récursivité les résout plusieurs fois).

Afin d'éviter ces répétitions différentes stratégies sont utilisées (cf. paragraphe suivant).

Programmation dynamique vs méthode dichotomique

Les méthodes « ***diviser pour régner*** », ***méthode dichotomique*** et ***programmation dynamique,*** consistent à se ramener à la résolution de ***sous-problèmes de tailles inférieures***.
Mais à la différence de la méthode dichotomique qui nécessite que les sous-problèmes soient indépendants, en programmation dynamique ces sous-problèmes ne sont pas indépendants, on parle de ***chevauchement de sous-problèmes***.

Stratégies en programmation dynamique

Cette partie décrit les principes de la programmation dynamique à l'aide d'un exemple.

- Détermination des sous-problèmes et de leurs relations.
- La ***mémoïsation*** (de l'anglais memoïzation) consiste à stocker les solutions des sous-problèmes (amélioration de la complexité temporelle au détriment de la complexité spatiale). Cette mémorisation utilise parfois un dictionnaire.
- ***Approche descendante*** (top-down) ***récursive*** avec mémoïsation.
- ***Approche ascendante*** (bottom-up) ***itérative*** avec stockage des résultats.

Exemple – Suite de Fibonacci

L'exemple utilisé est le calcul des termes de la suite de Fibonacci ; il s'agit d'une illustration car ces techniques ne sont pas nécessaires pour calculer efficacement les termes de cette suite.

On considère la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$

Sous-problèmes

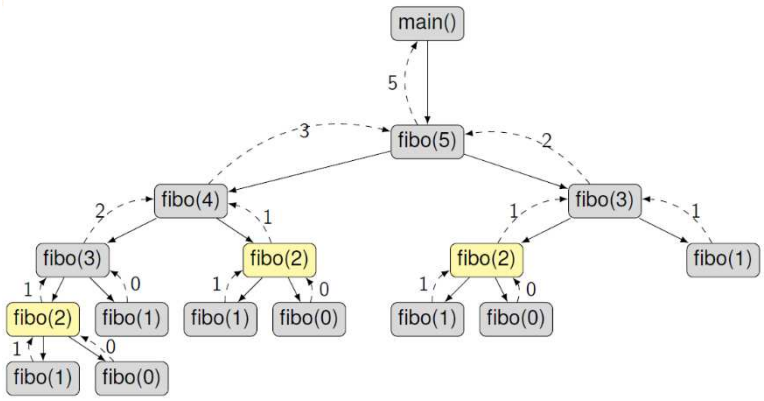
Le problème se ramène aux calculs de F_{n-1} et F_{n-2} mais ces deux sous-problèmes ne sont pas indépendants.

Exercice 6 :

Ecrire une fonction récursive *fibo*(*n*) « naïve » découlant directement de la définition de la suite.

```
1  def fibo(n):
2
3
4
```

L'arbre des appels pour calculer F_5 illustre le chevauchement des sous-problèmes :



La fonction *fibo*(*n*) ainsi écrite calculerait 2 fois *fibo*(*3*), 3 fois *fibo*(*2*).

Si C(*n*) est le coût en temps pour calculer F_n alors C(*n*) = C(*n*-1) + C(*n*-2) + O(1).
D'où C(*n*) ≥ 2 C(*n*-2) : la complexité est exponentielle.

Approche descendante récursive avec mémoïsation (à l'aide d'un dictionnaire) – « Top-down »

Exercice 7-1 **– Préliminaires - Utilisation d'un objet mutable comme paramètre par défaut**

Faire tourner la fonction suivante « à la main » : indiquer à chaque étape le contenu de la liste L si on exécute *test*(5) en complétant le tableau ci-dessous.

```
1  def test(n, L=[]):
2      if n==0: return L
3      L += [n]
4      return test(n-1)   # Ou test(n-1, L)
```

n	Exécution	L à l'étape *n*
5	test(5)	
4		
3		
2		
1		
0		

La liste L, utilisée ici pour stocker des informations (les valeurs successives de *n*), est transmise à chaque appel à la fonction *test* : cette liste est disponible et mise à jour d'appel en appel.
Il s'agit d'une ***technique de mémoïsation***.

Exercice 7-2 - ***Récursion avec mémoïsation à l'aide d'un dictionnaire***

Compléter le code de la fonction récursive *fibo_mem*(*n*, *memo*={0: 1, 1: 1}) renvoyant le terme d'ordre *n* de la suite de Fibonacci.
L'algorithme est le suivant : la fonction teste la présence d'un terme déjà calculé dans le dictionnaire avant d'entamer un nouveau calcul puis le dictionnaire *memo* est mis à jour si nécessaire.

Rappel : les clés d'un dictionnaire peuvent être des entiers, des flottants… Ici, le dictionnaire utilise des clés entières (les valeurs de *n*).

```
1  def fibo_mem(n, memo={0:1, 1:1}):
2      if
3          return
4      memo[n] =
5      return
```

Remarque : le dictionnaire joue ici le rôle du tableau dans le problème du sac à dos.

Exercice 8 : complexité

1. Rappeler la complexité d'une opération élémentaire quelconque sur un dictionnaire.

2. En déduire la complexité de la fonction *fibo_mem*.

Approche ascendante itérative avec stockage dans un dictionnaire – « Bottom-up »

Exercice 9 - ***Itération et stockage dans un dictionnaire***

Compléter le code de la fonction itérative *fibo_asc*(*n*) renvoyant le terme d'ordre *n* de la suite de Fibonacci : les valeurs successives sont calculées dans l'ordre croissant et sont stockées dans un dictionnaire.

```
1  def fibo_asc(n):
2      memo = {0:1, 1:1}
3      for k in range(       ):
4
5      return
```

Exercice 10 : itération et stockage dans une liste

Ecrire une fonction analogue *fibo_asc2*(*n*) utilisant une liste au lieu d'un dictionnaire.

```
1  def fibo_asc2(n):
2      L =
3      for k in range(  ,     ):
4
5      return
```

Remarque – Algorithme le plus économique

Comme annoncé, dans le cas de la suite de Fibonacci, les algorithmes précédents ne sont pas les plus efficaces mais ils permettent d'illustrer les concepts de la programmation dynamique.
Il suffit en réalité de mémoriser les deux derniers termes de la suite et non tous les termes.

```
1  def fibo_iter(n):
2      u, v = 1, 1
3      for i in range(n-1):
4          u, v = v, u+v
5      return v
```

Conclusion – Méthodes dynamiques sur l'exemple de la suite de Fibonacci

- ✓ Sous-problèmes : F_{k-1} et F_{k-2}
- ✓ Mise en évidence du chevauchement des sous-problèmes avec un tableau ou un arbre et mise en évidence des relations entre solutions : $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$
- ✓ Approche descendante récursive avec mémoïsation ou approche ascendante itérative avec stockage des solutions intermédiaires au cours de la boucle.