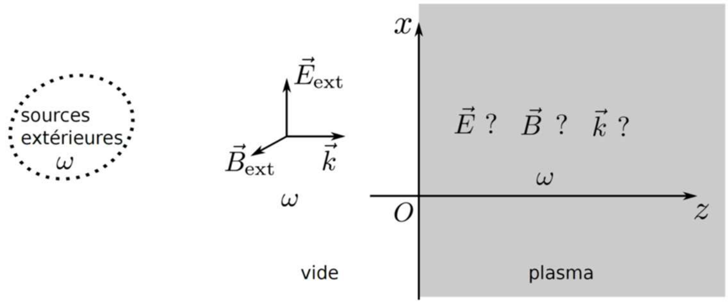
Ondes transverses dans un plasma dilué

Modèle du plasma dilué – Relation constitutive

La relation constitutive du milieu est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton aux particules chargées présentes dans le plasma sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses et approximations

1. ***Particules non relativistes*** : $v \ll c$.
2. ***Poids des particules négligé*** devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. ***Force magnétique négligée*** devant la force électrique dans Lorentz : $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. ***Ions immobiles***.
5. ***Plasma dilué*** : ***on néglige les interactions à courte portée*** entre la particule étudiée et les charges les plus proches, en particulier les chocs, il n'y a donc pas lieu de tenir compte d'une force de frottement comme dans le modèle de Drude[(*)].
6. On cherche un ***champ transverse*** de la forme : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ où $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ avec $\underline{k}$ a priori complexe et $\underline{\vec{E}}_0 \perp \underline{\vec{k}}$ (champ transverse, cf. schéma ci-dessous).



(*) Cependant, il y a bien interaction entre la particule étudiée M et les autres particules du plasma à plus longue portée car la particule M est soumise au champ résultant (champ « externe » et champs créés par les déplacements des charges au sein du plasma sous l'influence de l'onde « incidente »).

Conséquences (résumé)

Relations constitutives

L'hypothèse ***onde transverse électrique*** impose la ***neutralité du plasma*** : $\rho = 0$.

Dans un plasma dilué, le champ électromagnétique met en mouvement les électrons et il apparaît une ***densité de courants*** : $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$.

Avec $\underline{\sigma} = \dfrac{n_e e^2}{j\omega m_e}$ ***imaginaire pure*** où n_e est la densité volumique des électrons et m_e la masse d'un électron.

Relation de structure : $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{k}}{\omega}\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}} = \underline{n}\dfrac{\vec{u}\wedge\underline{\vec{E}}}{c}$ avec $\underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_0}$ ***indice complexe***.

Relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$ avec $\omega_P = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$, ***pulsation plasma***.

On distingue deux domaines fréquentiels :

- **$\omega > \omega_P \Rightarrow k$ réel donc propagation possible : *domaine de transparence***

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_P}{\omega}\right)^2}} > c$$ (possible : aucune énergie associée à la vitesse de phase).

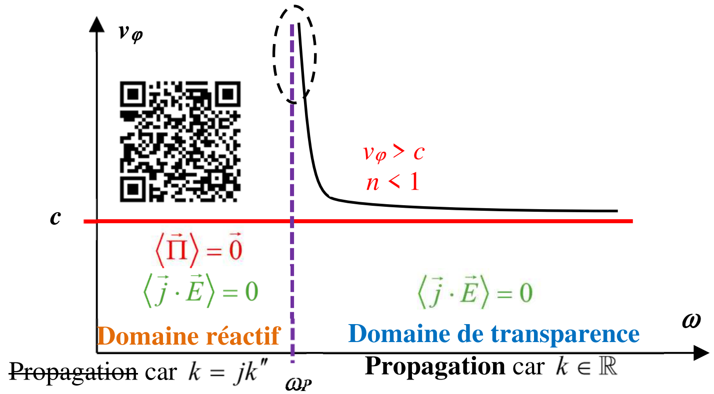
$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2} < 1$$ (inhabituel…).

- **$\omega < \omega_P \Rightarrow \underline{k}$ imaginaire pur donc propagation impossible : *domaine réactif***

  Il y a réflexion à l'interface air (vide) / plasma : $R = 1$.
  Onde ***évanescente***.

Aspects énergétiques

Dans tous les cas, la conductivité étant imaginaire pure, la ***puissance volumique moyenne*** reçue par les charges du plasma est ***nulle*** : $\langle \vec{j}\cdot\vec{E}\rangle = 0$.



Ondes électromagnétiques dans un plasma dilué

Les équations de Maxwell permettent d'établir les résultats suivants (cf. exercices).

Neutralité du plasma

Equation de Maxwell-Gauss et **hypothèse** ***OPPH transverse électrique*** $\vec{\underline{E}} \perp \vec{\underline{k}}$

$\Rightarrow$ ***Plasma neutre*** : $\rho = 0$

Relation constitutive

2ème loi de Newton appliquée à un électron

$\Rightarrow$ ***Conductivité imaginaire pure*** : $\underline{\sigma} = \dfrac{n_e e^2}{j\omega m_e}$ et loi d'Ohm locale $\vec{\underline{j}} = \underline{\sigma}\vec{\underline{E}}$

Structure du champ électromagnétique

Equation de Maxwell-Flux $\Rightarrow$ $\vec{B} \perp \vec{u}$: le champ $\vec{B}$ est également orthogonal à la direction de propagation, on dit que l'OPPH est ***transverse magnétique***.

Relation de structure (avec $\underline{k}$ et ω) : $\vec{\underline{B}} = \dfrac{\underline{k}}{\omega}\vec{u} \wedge \vec{\underline{E}}$: $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.

Relation de dispersion – Vitesse de phase

Equation de Maxwell-Ampère, relation de structure et **relation constitutive** $\Rightarrow$

Relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\underline{\sigma} \in \mathbb{C}$. On pose en général $\underline{k} = k' + jk''$

k' est lié à la ***propagation*** et à la ***dispersion*** : $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k'(\omega)}$ et ***k''*** est lié à ***l'atténuation***.

Indice complexe

Indice complexe

On appelle ***indice complexe*** d'un milieu la grandeur $\underline{n}$ telle que :

$$\underline{k} = \underline{n}\,k_0 \Leftrightarrow \underline{n} = \frac{\underline{k}}{k_0} \quad \text{où } k_0 = \frac{\omega}{c} \text{ (vecteur d'onde dans le vide)}$$

Indices de dispersion et d'absorption

La relation $\underline{k} = k' + jk''$ conduit à écrire de façon analogue :

$\underline{n} = n' + jn''$ où : n' est ***l'indice de dispersion*** $n' = \mathrm{Re}(\underline{n})$;

n'' est ***l'indice d'absorption*** $n'' = \mathrm{Im}(\underline{n})$. ***Milieu transparent : n'' = 0***.

Relation de structure en fonction de $\underline{n}$

Relation de structure (avec $\underline{n}$ et c) : $\vec{\underline{B}} = \underline{n}\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{\underline{E}}}{c}$.

Relation indice optique / vitesse de phase : $n' = \dfrac{c}{v_\varphi}$

Isolants

On admet que dans les ***diélectriques*** (***isolants*** tels que l'air, le verre, les verres synthétiques, les plastiques, l'eau…) ces relations sont conservées.
Dans le cas de matériaux ***transparents***, l'absorption est négligeable : ***l'indice est réel***.

$\underline{n} = n'$ est alors noté n et on a, en norme : $B = n\dfrac{E}{c}$.

Lien avec l'optique ondulatoire

La relation $n'(\omega) = \dfrac{c}{v_\varphi(\omega)}$ ***dépend donc du milieu*** (cf. loi de Cauchy $n(\lambda_0) = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ dans les diélectriques, responsable de la dispersion dans un prisme).

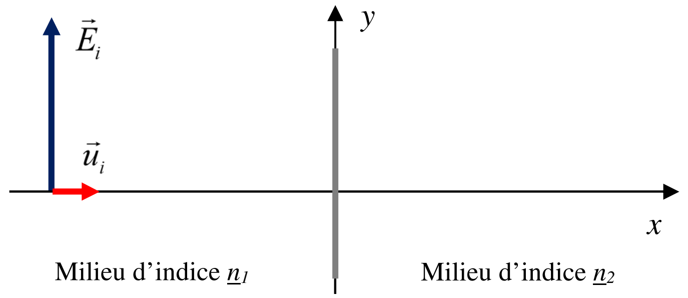
Dispersion / absorption – Vitesse de phase et vitesse de groupe

Cf. chapitre Dispersion – Absorption.

✏ Réflexion et transmission en incidence normale

On considère deux demi-espaces d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ séparés par le dioptre plan d'équation $x = 0$ et une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans la direction $\vec{e}_x$ (arrivant donc sous incidence normale sur le dioptre) polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$.

On prend l'origine des phases pour le champ incident en $x = 0$ à $t = 0$ et on note E_{0i} l'amplitude du champ électrique dans ce plan à cet instant.



Conditions aux limites *(admises)*

> ***On admet la continuité du champ électrique et du champ magnétique à l'interface entre les deux milieux.***

Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

$$\underline{r}_{1\to 2} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \in \mathbb{C}$$

$$\underline{t}_{1\to 2} = \frac{\underline{E}_{0tr}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \in \mathbb{C}$$

Diélectriques : coefficients réels

En incidence normale, les ondes réfléchies et réfractées sont polarisées rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

$$r_{1\to 2} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \in \mathbb{R} \qquad t_{1\to 2} = \frac{\underline{E}_{0tr}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \in \mathbb{R}$$

<u>Optique</u> : ***déphasage de π lors d'une réflexion « vitreuse »*** ($n_1 < n_2$ donc $r_{1\to 2} < 0$)

⇒ Différence de marche supplémentaire $\delta_{sup} = \lambda/2$ en optique).

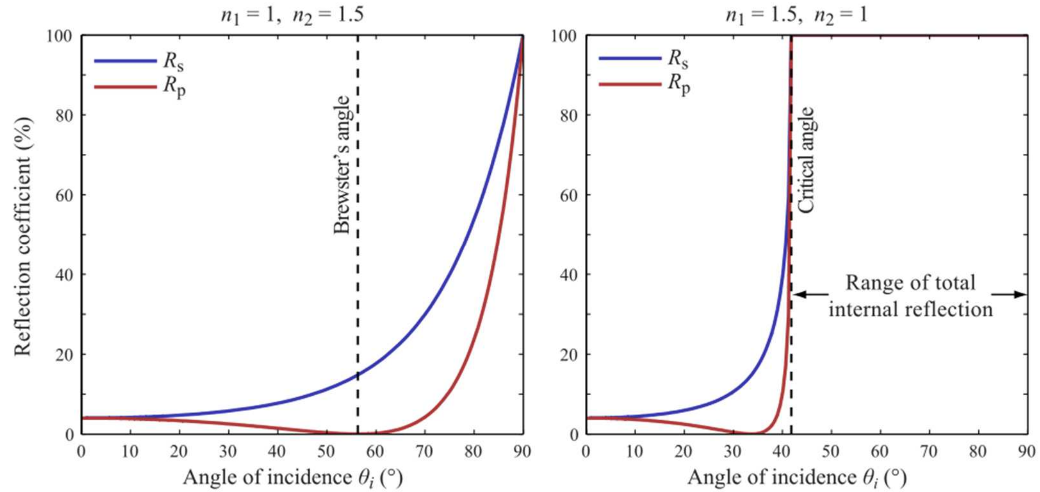
$$R_{1\to 2} = \frac{\left\|\langle\vec{\Pi}_r\rangle\right\|}{\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\|} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T_{1\to 2} = \frac{\left\|\langle\vec{\Pi}_t\rangle\right\|}{\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\|} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

La conservation de la puissance incidente s'exprime par : $R_{1\to 2} + T_{1\to 2} = 1$.

Ordres de grandeur : réflexion air / verre $R_{1\to 2} \approx 0{,}04$ et $T_{1\to 2} \approx 0{,}96$.

<u>Complément</u> (hors pgm)

Coefficient R en fonction de l'angle d'incidence (polarisation **TE** et **TM**) pour une réflexion vitreuse :



http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_equations

Vocabulaire :

Polarisation TE (indice s en anglais) = $\vec{E} \perp$ au plan d'incidence ;

Polarisation TM (indice p en anglais) = $\vec{E}$ // au plan d'incidence.