Flux - Divergence

Flux entrant et flux sortant à travers une surface fermée – Conventions

Considérons une surface fermée Σ (surface délimitant un volume *V*).
Il existe deux façons d'orienter le vecteur $\vec{n}(M)$ orthogonal à la surface au point M et donc deux façons d'orienter le vecteur surface élémentaire $d\vec{S}(M) = dS\,\vec{n}(M)$:

1. soit de l'intérieur vers l'extérieur, on parle de ***flux sortant***
   c'est la convention utilisée en électromagnétisme (théorème de Gauss) ;

2. soit de l'extérieur vers l'intérieur, on parle de ***flux entrant***
   c'est généralement la convention utilisée en thermodynamique (règle du porte-monnaie).

Le langage courant distingue ces deux orientations grâce aux termes flux sortant et flux entrant.

En électromagnétisme $d\vec{S} = d\vec{S}_{ext}$:

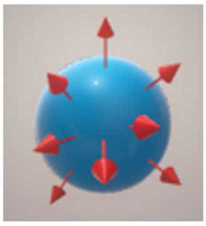
- le flux d'un vecteur sortant du volume V est donc compté positivement ;
- le flux d'un vecteur entrant dans le volume V est donc compté négativement.

En thermodynamique $d\vec{S} = d\vec{S}_{int}$:

- le flux d'un vecteur sortant du volume V est donc compté négativement ;
- le flux d'un vecteur entrant dans le volume V est donc compté positivement.

Ces deux conventions sont donc équivalentes puisqu'il suffit d'inverser le sens de $d\vec{S}$ pour passer de l'une à l'autre (les signes des flux sont alors changés).

Flux et divergence



Intuitivement, lorsqu'un flux dϕ sort (ou entre) à travers une surface fermée d*S* délimitant un volume élémentaire dτ, on conçoit que le champ $\vec{G}$ « diverge » depuis ce volume (ou « converge » vers ce volume).

On définit mathématiquement la divergence comme étant le flux volumique : $\mathrm{div}\vec{G} = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}$.

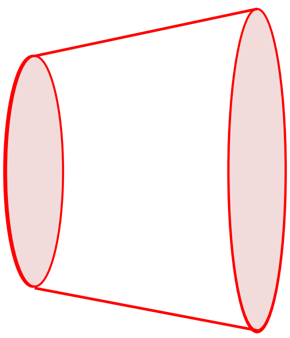
Le théorème de ***Green-Ostrogradski*** précise la relation entre divergence et flux sortant :

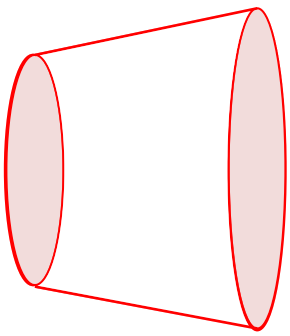
$$\oiint_{P\in S} \vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{S}_{ext}(P) = \iiint_{M\in V} \mathrm{div}\vec{G}(M)\,\mathrm{d}\tau(M)$$

$d\vec{S}_{ext}$ orientée vers l'extérieur de la surface fermée *S* délimitant le volume *V*

Le vecteur $\vec{G}$ est à flux conservatif $\Leftrightarrow \oiint_{P\in S} \vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{S}_{ext}(P) = 0$ quelle que soit la surface *S* choisie $\Leftrightarrow$ $div\,\vec{G} = 0$.

Application à un tube de champ





Opérateur divergence en coordonnées cartésiennes

$$\vec{G}\left|\begin{array}{l} G_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) \\ G_z(x,y,z) \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{div}\vec{G} = \frac{\partial G_x x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial G_y y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial G_z z(x,y,z)}{\partial z}$$

Définition intrinsèque du laplacien

$$\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right)$$

Opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$