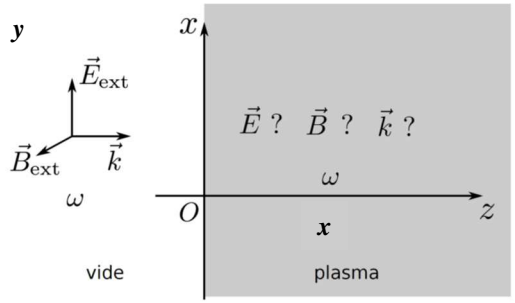
Objectif : déterminer le champ électromagnétique à l'intérieur du métal lorsqu'une onde arrive à l'interface air (vide) / métal.

$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$\mu_0 \approx 4\,\pi\,10^{-7}$	$N.A^{-2}$
$\varepsilon_0 \approx 1/(36\pi 10^9)$	$F.m^{-1}$
$\sigma_{0\,Cu} \approx 10^8$	$S.m^{-1}$
$f_{opt,\,visible} \approx 10^{15}$	Hz
$f_{élec\ ARQS} \ll f_{opt}$	



1ère partie – Fréquences électroniques - Modélisation du métal dans l'ARQS

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\dfrac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\dfrac{m_e}{\tau}\vec{v}$.
6. Champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ de période $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s : le milieu réagit instantanément aux variations du champ aux fréquences électrocinétiques (ARQS).

1. Relation constitutive - Cf. chapitre « Conduction électrique »

1.1. Retrouver la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$ et l'expression de la conductivité complexe en utilisant la deuxième loi de Newton appliquée à un électron.

Dans le cadre de l'hypothèse $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s, montrer que $\underline{\sigma} \approx \sigma_0 = \dfrac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

1.2. Prouver que la neutralité du métal $\rho = 0$ est atteinte en un temps très inférieur à τ en écrivant l'équation différentielle en ρ issue de l'équation de Maxwell-Gauss, de l'équation de conservation de la charge et de la loi d'Ohm locale.

2. Relation de dispersion pour une pseudo-OPPH ($\underline{k}$ complexe)

2.1. Etablir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma_0$ pour un métal de conductivité σ_0 en utilisant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm locale.

2.2. Montrer que $(\omega/c)^2 \ll \omega\mu_0\sigma_0$ si $f \ll \sigma_0 / \varepsilon_0 = f_0$. Cette dernière inégalité est-elle vérifiée dans le domaine de validité de la loi d'Ohm locale avec une conductivité réelle ? Simplifier en conséquence l'équation de dispersion.

2.3. Montrer que $\underline{k}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{k} = \pm\dfrac{1-j}{\delta}$; rappel : $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Exprimer δ en fonction de μ_0, σ_0 et ω.

3. Effet de peau

3.1. En considérant un champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\,\vec{e}_y$ dans le demi-espace infini $x > 0$ (pseudo-OPPH de vecteur d'onde complexe), montrer que l'une des deux solutions précédentes pour $\underline{k}$ est à rejeter et donner l'expression de l'onde sous forme réelle. Justifier l'appellation « ***épaisseur de peau*** » pour δ.

3.2. Applications numériques : calculer δ dans le cuivre à 50 Hz et à 5 GHz et conclure quant à la conduction dans les fils utilisés en TP.

3.3. Montrer que $\left\|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \ll \|\vec{j}\|$ en ordre de grandeur dans le domaine de fréquences considéré (retrouver 2.2) puis établir que $\Delta\vec{E} - \mu_0\sigma_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Commenter ce résultat.

3.4. Montrer que l'épaisseur de peau δ s'interpréter comme une distance caractéristique de diffusion de la forme $\sqrt{D\tau_d}$ où D est un coefficient de diffusion.

Exprimer D et préciser quelle grandeur joue ici le rôle de τ_d.

4. Interface vide / conducteur ohmique dans l'ARQS – Aspects énergétiques (Facultatif)

L'approximation utilisée pour établir la relation de dispersion simplifiée (2.2) consiste à écrire :

$\dfrac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\sigma_0\omega \Leftrightarrow k_0 = \dfrac{\omega}{c} \ll \dfrac{1}{\delta}$ (en utilisant l'expression de δ trouvée en 2.3).

Comme $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$, on en déduit que la quantité $\varepsilon = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0} \ll 1$ dans le domaine $f < 10^{14}$ Hz.

4.1. Montrer que l'indice complexe du métal peut s'écrire : $\underline{n} = \dfrac{1-j}{\varepsilon}$. Rappel : $\underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_0}$.

4.2. Exprimer $\underline{r}_{1\to 2}$ et $\underline{t}_{1\to 2}$ à l'interface vide/métal puis les exprimer en fonction de ε.

Rappel : $\underline{r}_{1\to 2} = \dfrac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$ et $\underline{t}_{1\to 2} = \dfrac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$.

Donner les valeurs de ces coefficients dans la limite du conducteur parfait ($\sigma_0 \to \infty$) et interpréter. Citer des applications dans la vie courante.

2ème partie – Fréquences optiques - Modélisation du métal hors ARQS

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$.
6. Champ $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ de période $T < \tau \approx 10^{-14}$ s ($f \approx 10^{15}$ Hz) **hors** ARQS.

5. Relation constitutive - Conductivité complexe

En utilisant la 2ème loi de Newton en notation complexe pour déterminer la réponse du milieu en régime sinusoïdal établi, montrer que le métal soumis à un champ $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ possède une conductivité ***complexe*** : $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

6. Propagation/diffusion - Relation de dispersion pour une pseudo-OPPH ($\underline{k}$ complexe)

6.1. On rappelle que le métal est localement neutre.

A partir des équations de Maxwell, montrer que $\underline{\vec{E}}$ vérifie l'équation :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0\underline{\sigma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

6.2. Montrer que la relation de dispersion est de la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\underline{\sigma}$.

6.3. En utilisant l'expression de la conductivité complexe, comment la relation de dispersion se simplifie-t-elle pour $\omega\tau \gg 1$?

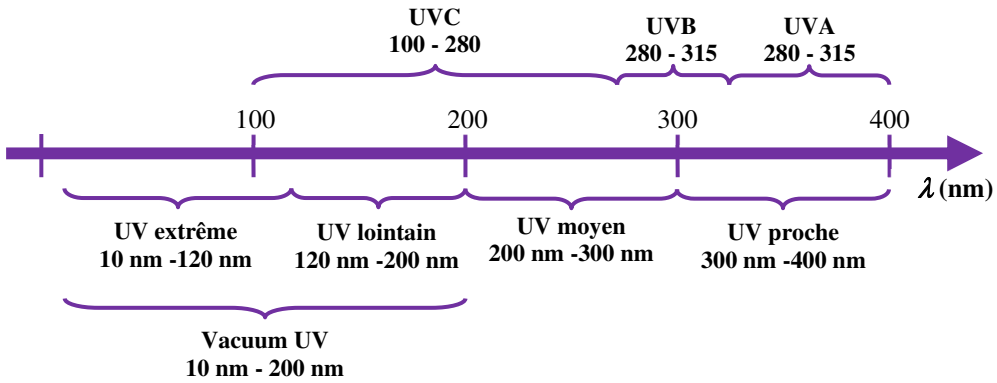
Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$ et que tout se passe comme si le métal se comportait comme un ***plasma*** avec une pulsation à identifier.

6.4. Évaluer numériquement ω_P.

7. Interface vide / métal dans le visible

Dans le domaine visible, dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on (prendre $f \approx 10^{15}$ Hz) ? Que vaut alors $R_{1\to2}$?

8. Transparence des métaux dans l'ultraviolet



Dans le domaine des ultraviolets extrêmes (λ < 100 nm), dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on ? Que vaut alors $T_{1\to2}$? Commenter.

Est-il possible de bronzer derrière une feuille de papier aluminium comme semble le suggérer le titre de ce paragraphe ?