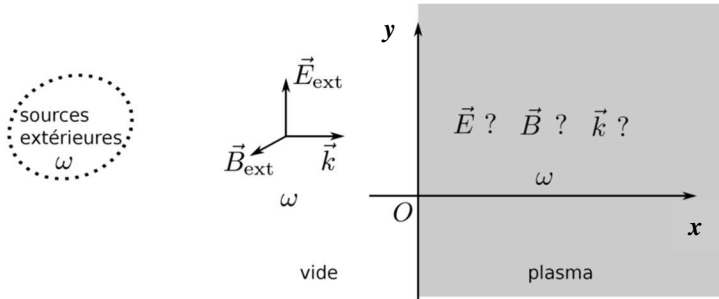


Objectif : déterminer le champ électromagnétique à l'intérieur du métal lorsqu'une onde arrive à l'interface air (vide) / plasma.



1^{ère} partie – Fréquences électroniques - Modélisation du métal dans l'ARQS

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$.
6. Champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ de période $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s : **le milieu réagit instantanément aux variations du champ aux fréquences électrocinétiques (ARQS).**

1. Relation constitutive - Cf. chapitre « Conduction électrique »

1.1. Savoir retrouver la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ et l'expression de la conductivité réelle

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \text{ en utilisant la deuxième loi de Newton appliquée à un électron.}$$

Dans le cadre de l'hypothèse $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s, montrer que $\underline{\sigma} \approx \sigma_0$.

1.2. Savoir prouver que la neutralité du métal $\rho = 0$ est atteinte en un temps très inférieur à τ en écrivant l'équation différentielle en ρ issue de l'équation de Maxwell-Gauss, de l'équation de conservation de la charge et de la loi d'ohm locale.

2. Relation de dispersion pour une pseudo-OPPH (\underline{k} complexe)

2.1. Etablir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma_0$ pour un métal de conductivité σ_0 en utilisant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm locale.

2.2. Evaluer en ordre de grandeur les deux termes $(\omega/c)^2$ et $\omega\mu_0\sigma_0$ dans le domaine de validité de la loi d'Ohm locale avec une conductivité réelle. Simplifier en conséquence l'équation de dispersion.

2.3. Montrer que \underline{k} peut s'écrire sous la forme : $\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$; rappel : $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Exprimer δ en fonction de μ_0, σ et ω .

3. Effet de peau

3.1. En considérant un champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$ dans le demi-espace infini $x > 0$ (pseudo-OPPH de vecteur d'onde complexe), montrer que l'une des deux solutions précédentes pour \underline{k} est à rejeter et donner l'expression de l'onde sous forme réelle. Justifier l'appellation « épaisseur de peau » pour δ .

3.2. Applications numériques : calculer δ dans le cuivre à 50 Hz et à 5 GHz et comparer au diamètre des fils utilisés en TP. Rappel : $\sigma_0 \approx 10^7 \text{ Sm}^{-1}$.

3.3. Comparer $\|\vec{j}\|$ et $\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ en ordre de grandeur dans le domaine de fréquences considéré puis établir que $\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$. Commenter ce résultat.

3.4. Montrer que l'épaisseur de peau δ s'interprète comme une distance caractéristique de diffusion de la forme $\sqrt{D\tau}$ où D est un coefficient de diffusion. Exprimer D et préciser quelle grandeur joue ici le rôle de τ .

4. Interface vide / conducteur ohmique dans l'ARQS – Aspects énergétiques (Facultatif)

L'approximation utilisée pour établir la relation de dispersion simplifiée (2.2) consiste à écrire :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0 \sigma \omega \Leftrightarrow k_0 = \frac{\omega}{c} \ll \frac{1}{\delta} \text{ (en utilisant l'expression de } \delta \text{ trouvée en 2.3).}$$

Comme $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, on en déduit que la quantité $\epsilon = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \ll 1$ dans le domaine $f < 10^{14}$ Hz.

4.1. Montrer que l'indice complexe du métal peut s'écrire : $\underline{n} = \frac{1-j}{\epsilon}$. Rappel : $\underline{n} = \frac{k}{k_0}$.

4.2. Exprimer $r_{1 \rightarrow 2}$ et $t_{1 \rightarrow 2}$ à l'interface vide/métal puis les exprimer en fonction de ϵ .

$$\text{Rappel : } r_{1 \rightarrow 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t_{1 \rightarrow 2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Donner les valeurs de ces coefficients dans la limite du conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$) et interpréter. Citer des applications dans la vie courante.

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$.
6. Champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ de période $T < \tau \approx 10^{-14}$ s ($f \approx 10^{15}$ Hz) hors ARQS.

5. Relation constitutive - Conductivité complexe

En utilisant la 2^{ème} loi de Newton en notation complexe pour déterminer la réponse du milieu en régime sinusoïdal établi, montrer que le métal soumis à un champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

possède une conductivité **complexe** : $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

6. Propagation/diffusion - Relation de dispersion pour une pseudo-OPPH (\underline{k} complexe)

6.1. On rappelle que le métal est localement neutre.

A partir des équations de Maxwell, montrer que \vec{E} vérifie l'équation :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

6.2. Montrer que la relation de dispersion est de la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0 \underline{\sigma}$.

6.3. En utilisant l'expression de la conductivité complexe, comment la relation de dispersion se simplifie-t-elle pour $\omega\tau \gg 1$?

Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et que

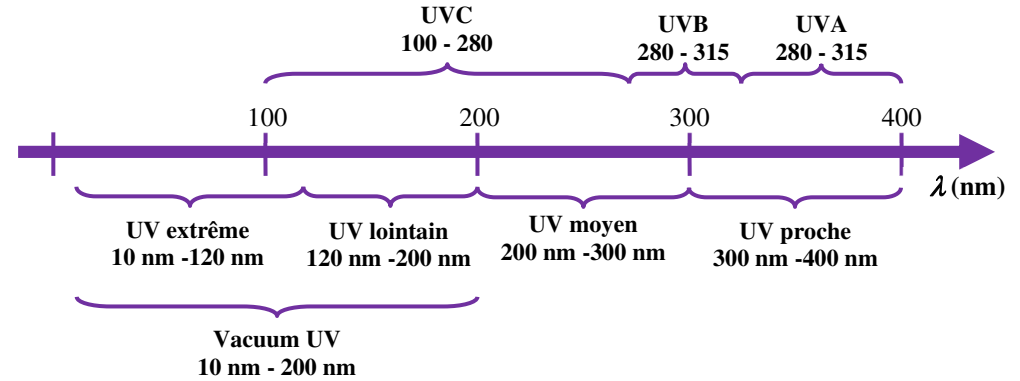
tout se passe comme si le métal se comportait comme un **plasma** avec une pulsation à identifier.

6.4. Évaluer numériquement ω_p .

7. Interface vide / métal dans le visible

Dans le domaine visible, dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on (prendre $f \approx 10^{15}$ Hz) ? Que vaut alors $R_{1 \rightarrow 2}$?

8. Transparence des métaux dans l'ultraviolet



Dans le domaine des ultraviolets extrêmes ($\lambda < 100$ nm), dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on ? Que vaut alors $T_{1 \rightarrow 2}$? Commenter.



Est-il possible de bronzer derrière une feuille de papier aluminium comme semble le suggérer le titre de ce paragraphe ?