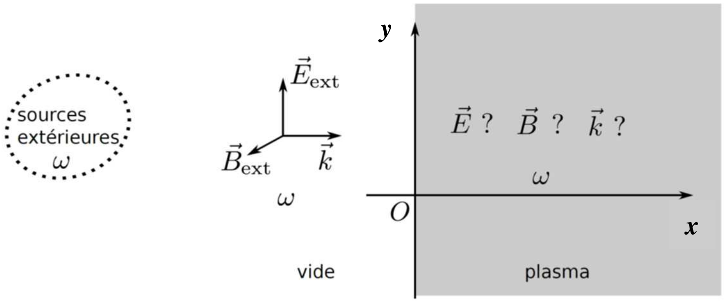
Objectif : déterminer le champ électromagnétique à l'intérieur du plasma lorsqu'une onde arrive à l'interface air (vide) / plasma.



Hypothèses fondamentales

1. Particules non relativistes : $v \ll c$.
2. Plasma dilué : ***on néglige les interactions à courte portée*** entre la particule étudiée et les charges les plus proches (on néglige en particulier les chocs, il n'y a donc pas lieu de tenir compte d'une force de frottement comme dans le modèle de Drude).
3. On cherche un champ transverse de la forme : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ où $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ avec $\underline{k}$ a priori complexe et $\underline{\vec{E}}_0 \perp \underline{\vec{k}}$ (champ transverse, cf. schéma ci-dessus).

1ère partie - Modélisation du plasma – Relation constitutive

Milieu constitué :
- ***d'électrons*** (masse m_e , charge $-e$) avec une densité n_e ;
- ***d'ions*** (masse M, charge Ze) avec une densité n_i .

Rappels : $m_e \approx 10^{-30}$ kg ; $m_p \approx m_N \approx 2000\, m_e$

1. Approximations

1.1. Montrer en effectuant une application numérique que le poids des particules peut être négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz même pour un champ faible de 1 Vm^{-1}.

1.2. L'hypothèse plasma ***dilué*** ou ***peu dense*** permet de supposer que la structure des ondes électromagnétiques reste proche de celle du vide.
En supposant les particules non relativistes, comparer alors les composantes magnétique et électrique de la force de Lorentz en exprimant $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$ (en ordre de grandeur en fonction de v, B, E puis en fonction de v et c) ; montrer que $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.

1.3. Comparer l'accélération des ions et celle des électrons (soumis au même champ) et justifier qu'il est possible de considérer que les ions restent immobiles.
Rappel : $m_{\text{Proton}} \approx m_{\text{Neutron}} \approx 2000 \times m_{\text{électron}}$.

2. Neutralité du plasma soumis à une OPPH transverse électrique

2.1. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss complexe et l'hypothèse d'une *onde transverse* électrique de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ avec $\underline{\vec{E}}_0 \perp \underline{\vec{k}}$, montrer que le plasma reste neutre.

3. Densité de charges et densité de courants

3.1. Les ions étant immobiles, on suppose que leur densité est homogène et constante : $n_i(M,t) = cte = n_i$.
Montrer que la densité des électrons $n_e(M,t)$ est également constante en utilisant la neutralité électrique.

3.2. En déduire la densité de courant $\vec{j}(M,t)$ en fonction de e, n_e et $\vec{v}_e$ où $\vec{v}_e$ est le vecteur vitesse de l'électron qui passe en M à l'instant t (grandeur Eulérienne).

4. Relation constitutive - Conductivité du plasma

4.1. A priori, le plasma doit être considéré comme un *fluide* de particules chargées.
En utilisant les échelles spatiale et temporelle caractéristiques des variations de $\vec{v}_e$, montrer, en ordre de grandeur, que $\left\|\dfrac{\partial\vec{v}_e}{\partial t}\right\| \gg \left\|\left(\vec{v}_e\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}_e\right\|$.
Ce résultat permet de choisir comme système un électron et non une particule fluide car l'accélération se réduit à la dérivée locale de la vitesse comme pour une particule unique.

4.2. L'hypothèse plasma ***peu dense*** permet de supposer également que les chocs sont négligeables : les électrons ne sont donc soumis qu'à la force de Lorentz.
En étudiant le mouvement d'un électron soumis au champ $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j\omega t}\, \vec{e}_y$, montrer qu'il est possible d'écrire la relation précédente sous une forme analogue à la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$ et montrer que la ***conductivité complexe*** est $\underline{\sigma} = \dfrac{n_e e^2}{j\omega m_e}$ ***relation constitutive***.

2ème partie - Propagation dans le plasma

5. Relation de dispersion – Pulsation plasma

5.1. Ecrire les équations de Maxwell en notation réelle et en déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique en fonction de la densité de courant (réelle).

5.2. Écrire les équations de Maxwell en notation complexe en tenant compte de la modélisation du milieu.

5.3. En déduire que le champ magnétique est transverse et donner la ***relation de structure***.

5.4. Etablir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\underline{\sigma}$.

5.5. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire sous la forme : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et exprimer la ***pulsation plasma*** ω_P.

5.6. Montrer que cette relation fait apparaître une bifurcation de comportement pour le plasma (i.e. il faut distinguer deux domaines de fréquences/pulsations dans la suite).

6. Indice complexe

Rappels (cf. chapitre Dispersion – Absorption).

On pose en général $\underline{k} = k' + jk''$

k' est lié à la ***propagation*** et à la ***dispersion*** : $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k'(\omega)}$ et k'' est lié à ***l'atténuation***.

Indice complexe

On appelle ***indice complexe*** d'un milieu la grandeur $\underline{n}$ telle que :

$$\underline{k} = \underline{n}\, k_0 \Leftrightarrow \underline{n} = \frac{\underline{k}}{k_0} \quad \text{où } k_0 = \frac{\omega}{c} \text{ (vecteur d'onde dans le vide)}$$

Indices de dispersion et d'absorption

La relation $\underline{k} = k' + jk''$ conduit à écrire de façon analogue :

$\underline{n} = n' + jn''$ où : n' est ***l'indice de dispersion*** $n' = \mathrm{Re}(\underline{n})$;

n'' est ***l'indice d'absorption*** $n'' = \mathrm{Im}(\underline{n})$. ***Milieu transparent : n'' = 0***.

6.1. Ecrire la relation de structure (question 5.3) en fonction de $\underline{n}$ et c.

7. $\omega > \omega_P$: domaine de transparence

On se place dans le cas où $\omega > \omega_P$ (pulsation de l'onde supérieure à la pulsation plasma).

7.1. Justifier que l'onde est progressive (ni atténuée ni amplifiée) et exprimer sa vitesse de phase v_φ .

Exprimer l'indice $n' = \dfrac{c}{v_\varphi}$ du plasma en fonction de ω et ω_P.

7.2. Représenter l'allure du graphe $v_\varphi(\omega)$ en fonction de ω (analyse asymptotique). Commenter.

7.3. A partir de la relation de dispersion, déterminer une relation entre la vitesse de groupe v_g et la vitesse de phase v_φ. Donner l'expression de v_g.

8. $\omega < \omega_P$: domaine réactif

On se place dans le cas où $\omega < \omega_P$ (pulsation de l'onde inférieure à la pulsation plasma).

8.1. On considère le champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\, \vec{e}_y$ en posant $\underline{k} = j\,k''$.

Exprimer $k''(\omega)$ et justifier que le cas $k'' > 0$ est exclus.

Montrer que le champ $\vec{E}$ ne possède pas une structure d'OPPH mais la une structure d'onde stationnaire atténuée : on parle d'***onde évanescente***.

3ème partie – Aspects énergétiques

Rappel : $\langle xy \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{x}^* \times \underline{y}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{x} \times \underline{y}^*\right)$

Cette relation est généralisable au produit scalaire et au produit vectoriel de deux vecteurs.

9. Domaine de transparence et domaine réactif : interprétation énergétique du caractère imaginaire pur de la conductivité $\underline{\sigma}$

9.1. Compte tenu de l'expression de $\underline{\sigma}$, quel est le déphasage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{j}$?

9.2. Exprimer la puissance volumique moyenne $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ reçue par les charges du plasma.

10. Domaine plasma réactif ($\omega < \omega_P$)

10.1. Rappeler la relation de structure du champ électromagnétique puis en déduire le déphasage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le domaine réactif.

10.2. En déduire sans calculs, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour un plasma réactif et commenter.