Notation : $\hat{x} = \vec{e}_x$ *Extrait de Mines Ponts PC physique 1 2007*

D : VIBRATIONS DE LA CORDE VERTICALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

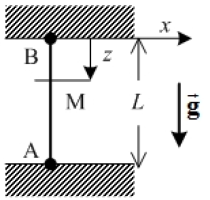

Fig. 5 – Corde tendue et fixée en ses extrémités.

La corde est à nouveau verticale, fixée en ses deux extrémités A et B (Fig. 5). L'axe des z est toujours orienté vers le bas et l'origine est maintenant à l'extrémité B : les points O et B coïncident. L'axe Ox est dans un plan horizontal. La tension de la corde au point A, $T(\mathrm{A})$ est très grande devant le poids de la corde : $T(\mathrm{A}) >> m_T g$. La position d'un point M de la corde est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B.

Position d'équilibre

❑ **20** – Définir ce qu'est la tension $T(\mathrm{M})$ de la corde en un point M. Exprimer $T(\mathrm{M})$ en fonction de $T(\mathrm{A})$, $m_T g$ et $\mu g z$. Montrer qu'à l'équilibre $T(\mathrm{M})$ est pratiquement constante le long de la corde.

Vibrations

❑ **21** – La corde vibre et le point M, de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x, est fonction de z et du temps t. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical. Déterminer l'équation des ondes suivie par la fonction $x(z,t)$ en négligeant les termes du deuxième ordre en θ (approximation des petits mouvements). Exprimer la célérité c des ondes en fonction de $T(\mathrm{A})$ et de la masse linéique μ. Calculer c pour $\mu = 10^{-3}$ kg.m^{-1} et $T(\mathrm{A}) = 1$ N.

❑ **22** – À l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z,0) = a\sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right)$, où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction d'onde stationnaire $x(z,t)$ sous la forme $x(z,t) = X(z)\mathrm{A}(t)$.

❑ **23** – À l'instant initial, la corde est excitée selon deux modes propres :

$$x(z,0) = a\sin\left(\pi\frac{z}{L}\right) + b\sin\left(4\pi\frac{z}{L}\right),$$

où a et b sont des constantes positives. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer avec le minimum de calculs la nouvelle fonction d'onde $x(z,t)$.

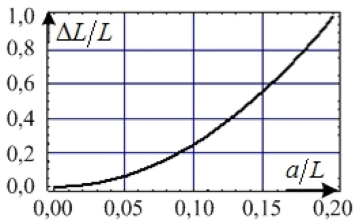

Fig. 6 – Allongement relatif de la corde, en %, en fonction de l'amplitude relative de la déformation.

❑ **24** – La Fig. 6 représente l'allongement relatif de la corde en fonction de l'amplitude initiale de la déformation. Commentez ce résultat, par exemple en discutant l'hypothèse (implicite !) que la masse linéique ne changeait pas au cours du mouvement.

E : VIBRATIONS DE LA CORDE FIXÉE À UNE EXTRÉMITÉ

Désormais (Fig. 7), l'extrémité B est fixe, l'extrémité A est libre.

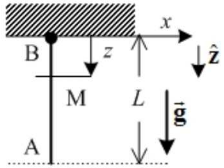

Fig.7 – Corde fixée en une extrémité et libre à l'autre.

Position d'équilibre

❑ **25** – La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par $T(z) = \mu g(L - z)$.

Vibrations

❑ **26** – La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément $\mathrm{d}z$ de corde à la cote z, montrer que la fonction d'onde vérifie l'équation [1] :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z}.$$

❑ **27** – Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{\mathbf{df}} = -\alpha\dfrac{\partial x}{\partial t}\hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}z$ agissant sur l'élément de corde $\mathrm{d}z$, $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?

❑ **28** – On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation $(z << L)$. Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0\exp\left[j(\omega t - kz)\right]$, où k est une constante réelle ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ, g et L $\left(j^2 = -1\right)$.

❑ **29** – Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?

❑ **30** – On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation [1] de la question **26** dans la région $z << L$ sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{a}\exp\left[j(\omega t - \underline{k}z)\right]$, avec $\underline{k} = k_1 + jk_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels). Exprimer k_2. En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question **28** ?

❑ **31** – Établir alors et représenter graphiquement la relation de dispersion. Poser $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$ et montrer que la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

❑ **32** – Déterminer la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe.