Corde vibrante amortie

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Établir l'équation de dispersion sur une corde horizontale inextensible de masse linéique μ amortie par frottement fluide ($d\vec{F} = -h\mu dx\vec{v}$) dans l'approximation des petits mouvements au voisinage de l'équilibre. On néglige le poids de la corde devant la tension.

Énoncé détaillé

La corde s'étend de $x = 0$ à $x = \infty$ et est tendue avec la tension T très supérieure au poids de la corde.

1 Établir l'équation des ondes sur la corde.

On cherche des solutions complexes de la forme d'une « **pseudo OPPH** » :

$$\underline{y}(x,t) = \underline{y_m} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{où} \quad \underline{y_m} = y_m e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{k} \text{ a priori complexe et } \omega \text{ réel.}$$

2 Établir l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\dfrac{h}{c^2}$.

On pose $k = k' + jk''$.

3 Expliciter $y(x, t)$ en notation réelle en fonction de k' et k''.

4 Justifier par des arguments physiques que $k'' < 0$.

Il est donc possible de poser $k'' = -\dfrac{1}{\delta}$, quelle est la signification physique de δ ?

Pour quelle raison utilise-t-on le terme « pseudo OPPH » pour décrire un tel signal ?

5 Exprimer la vitesse de phase de cette pseudo-onde.

6 En limitant les calculs à l'ordre un en $\varepsilon = h/\omega$, montrer que la relation de dispersion devient $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}\left(1 - j\dfrac{h}{2\omega}\right)$.

En déduire k' et k'' puis la vitesse de phase v_ϕ et δ en fonction de h et c.
Commenter