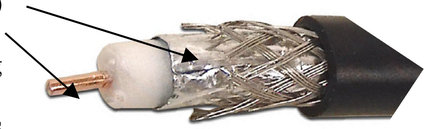
Câble coaxial (ligne bifilaire) sans pertes

Introduction

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique (gaine, en général reliée à la terre) entourant un conducteur filiforme (âme du câble).

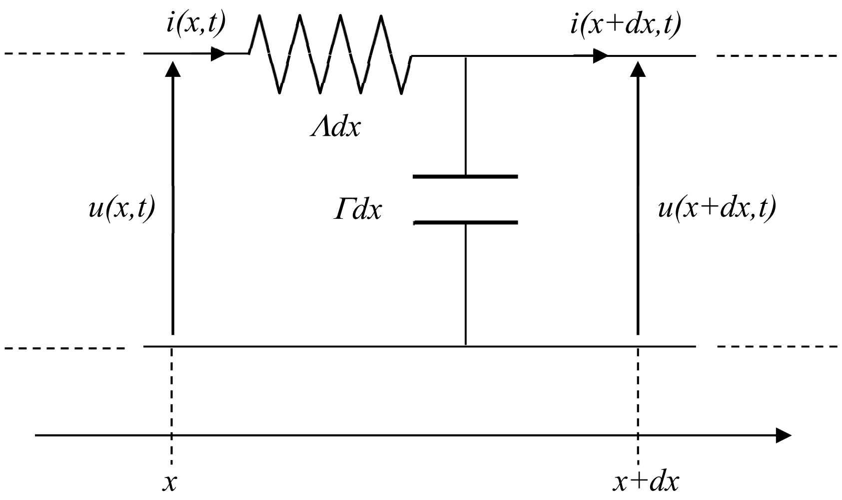


Ce câble peut éventuellement être très long (télécom…).

En électrocinétique, les circuits sont de petites dimensions. Dans ces conditions les phénomènes ondulatoires peuvent être négligés : l'intensité à un instant donné est la même en tout point d'une branche. Les composants et le circuit lui-même sont modélisés par des constantes ***localisées*** (R, L, C).

Cette approximation n'est plus valable pour le câble et le circuit est modélisé par des ***constantes réparties*** : inductance linéique Λ ($H.m^{-1}$), capacité linéique Γ ($F.m^{-1}$). Un élément de circuit de longueur dx présente donc une inductance élémentaire Λdx (âme) et une capacité élémentaire Γdx (entre la gaine et l'âme), cet élément de circuit peut alors être traité dans l'ARQS (en effet, l'ARQS n'est pas valide à l'échelle du câble mais reste valide à l'échelle de l'élément dx).

La modélisation à l'instant t d'un élément de câble de longueur dx est alors la suivante :



On néglige toute perte (résistance linéique, conductance de fuite entre l'âme et la gaine).

On considérera que $\dfrac{\partial f(x+dx,t)}{\partial t} \approx \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$.

1. Équation de propagation sur la ligne

1.1. Donner l'expression de la tension aux bornes de l'inductance élémentaire en utilisant les notations du schéma.

1.2. Donner l'expression de l'intensité du courant dans la capacité élémentaire en utilisant les notations du schéma.

1.3. Écrire la loi des mailles et en déduire une équation aux dérivées partielles reliant $i(x,t)$ et $u(x,t)$. Cette équation sera notée (1).

1.4. Écrire la loi des nœuds et en déduire une autre équation aux dérivées partielles reliant $i(x,t)$ et $u(x,t)$. Cette équation sera notée (2).

1.5. En dérivant (1) par rapport à x et (2) par rapport à t, établir l'équation aux dérivées partielles que vérifie $u(x,t)$. Cette équation sera notée (3).

1.6. Commenter cette équation.

1.7. Établir une équation analogue pour $i(x,t)$.

2. Propagation d'une O.P.P.H.

2.1. Écrire la forme a priori d'une onde plane progressive harmonique $u(x,t)$ de pulsation ω et de vecteur d'onde k se propageant selon les x croissants sous forme réelle.

2.2. Rappeler la définition de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette O.P.P.H. et justifier cette définition par un calcul simple.

2.3. Écrire la forme complexe de cette O.P.P.H.

2.4. Établir une relation entre ω et k. Comment appelle-t-on cette relation ?

2.5. Que peut-on alors dire de la vitesse de phase ?

2.6. Que peut-on alors prévoir quant à la propagation d'un signal non sinusoïdal ? Expliquer en quelques lignes.

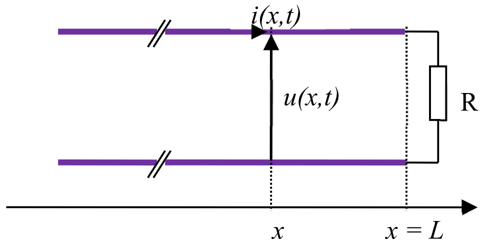
3. Notion d'impédance caractéristique

3.1. En écrivant $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sous forme d'O.P.P.H. (ω, k) se propageant selon les x croissants, montrer en utilisant l'équation (1) ou l'équation (2) sous forme complexe que le rapport $u(x,t)/i(x,t)$ (en notation réelle) est une constante liée aux caractéristiques du câble. On notera $\underline{Z}_C$ cette constante.

3.2. Que vaut le même rapport pour une onde se déplaçant en sens inverse ?

4. Réflexions en bout de ligne

On ferme en $x = L$ un câble semi-infini, s'étendant de $x = -\infty$ à $x = L$, sur une résistance R (schéma ci-dessous).



4.1. Écrire une relation entre $u(L,t)$ et $i(L,t)$.

4.2. À quelle condition sur R une onde progressive peut-elle se propager vers les x croissants ?

4.3. Qu'observe-t-on si cette condition n'est pas vérifiée ?

4.4. Définir le coefficient de réflexion en tension $\underline{r}_u$ en $x = L$.

4.5. Établir que $\underline{r}_u = \dfrac{R - \underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C}$.

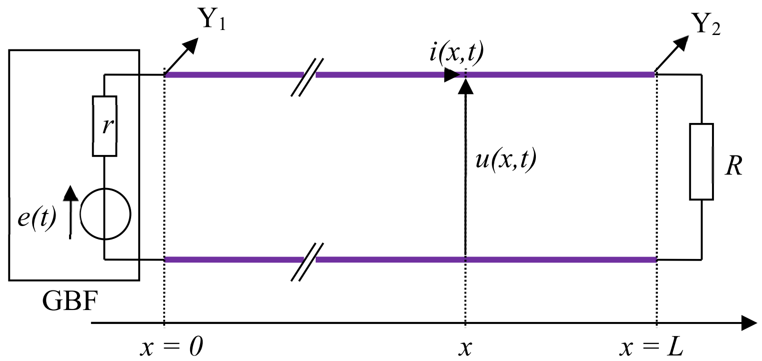
4.6. Donner les valeurs de ce coefficient pour $R = 0$, $R = \infty$ et $R = \underline{Z}_C$ (charge adaptée). Comment réalise-t-on en pratique les deux premières conditions ($R = 0$ et $R = \infty$) ?

4.7. Sachant que la résistance interne du générateur (cf. schéma ci-dessous) est $r = 50\ \Omega$, justifier que les signaux ne subissent pas de réflexion en $x = 0$.

5. Étude expérimentale

Le câble est relié en $x = 0$ à un GBF modélisé par un générateur de Thévenin (f.e.m. e et résistance r). Les deux voies d'un oscilloscope sont reliées au circuit comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Le GBF délivre des impulsions. Lorsque le câble n'est pas branché au GBF, le signal visualisé en voie 1 est celui de la figure 1.



La longueur du câble est $L = 100$ m. Mesures au RLC-mètre : inductance = 20 µH pour 100 m et capacité = 10 nF pour 100 m.

5.1. Calculer numériquement la célérité du signal et l'impédance caractéristique.

5.2. Évaluer graphiquement la fréquence du GBF.

5.3. Associer les figures 2, 3 et 4 aux trois cas envisagés pour la résistance R (sortie ouverte, sortie en court-circuit ou sortie connectée à une charge adaptée). On attend ici un raisonnement argumenté et précis.

5.4. Exploiter ces oscillogrammes quantitativement (montrer qu'ils permettent de calculer une grandeur importante) et qualitativement.

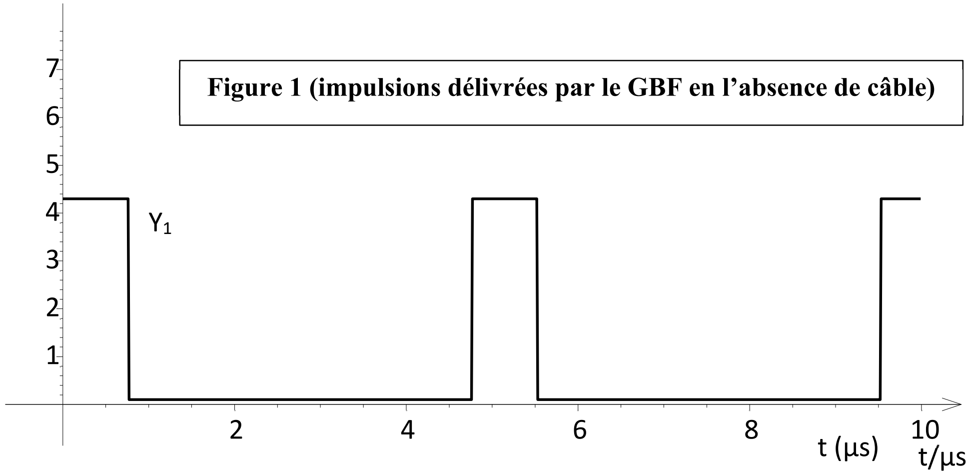


Figure 1 (impulsions délivrées par le GBF en l'absence de câble)

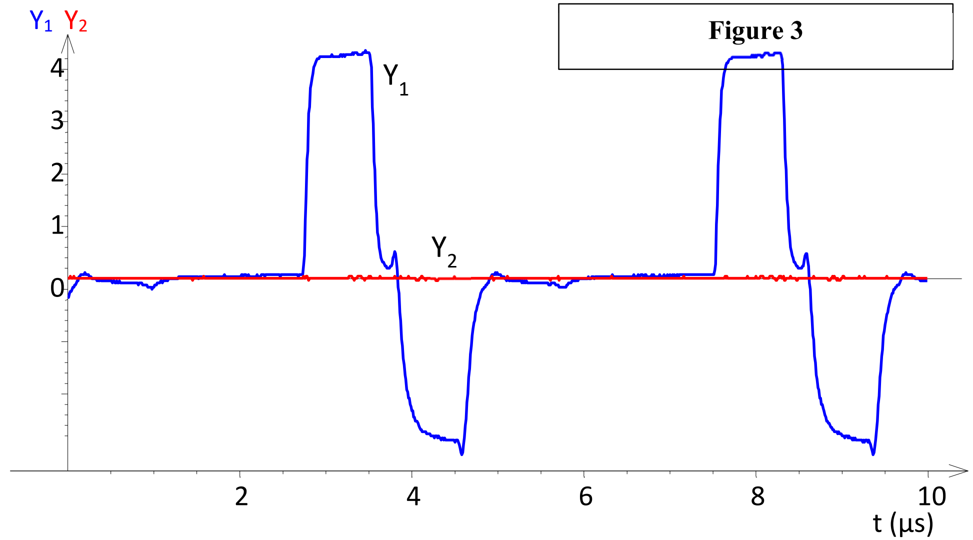


Figure 3

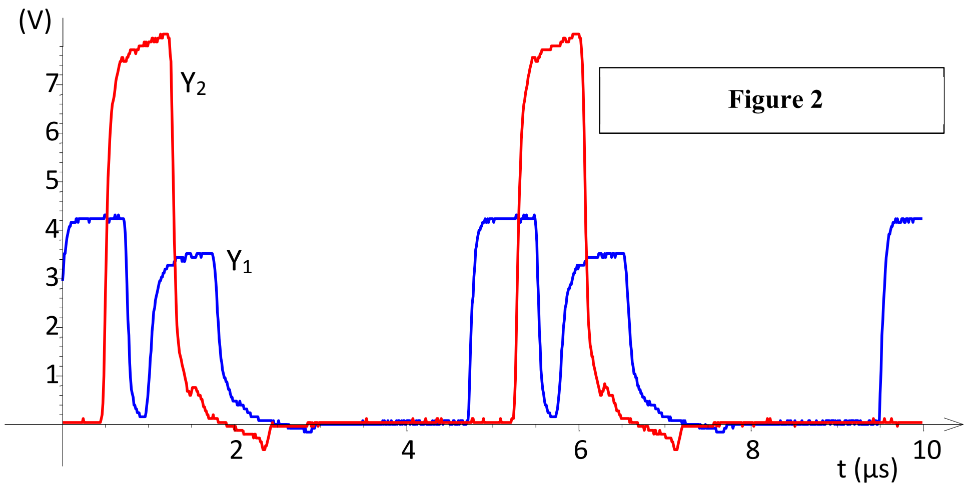


Figure 2

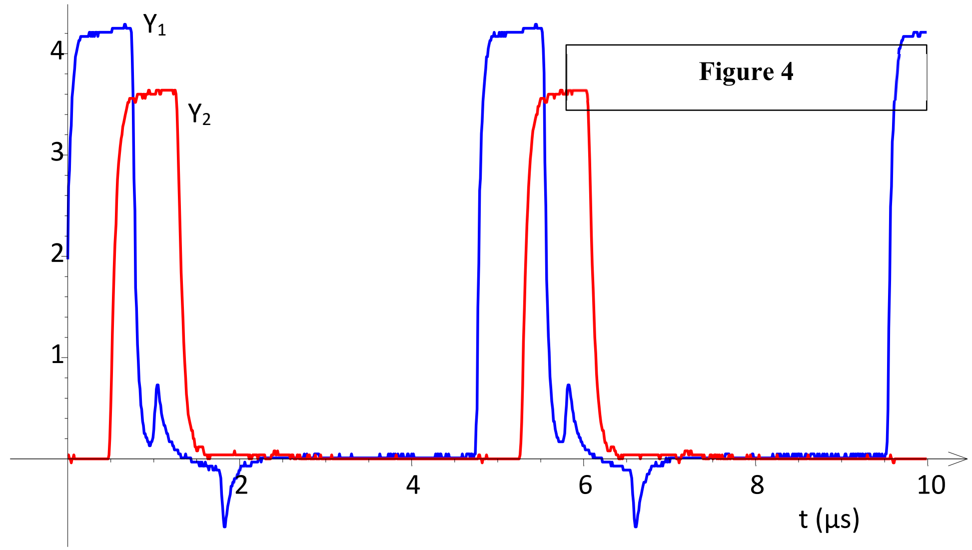


Figure 4